# Analysis II

**Nils-Peter Skoruppa**

**Universität Siegen 2001**

www.countnumber.de

Dieses Skript ist die Ausarbeitung einer Vorlesung zur Analysis II, die ich im Sommer-Semester 2001 an der Universität Siegen gehalten habe. Bei der Vorbereitung der Vorlesung habe ich ein Skript von 1990 benutzt, welches damals Studierende der Mathematik in Bonn nach Vorlesungen von F. Hirzebruch und unter meiner Anleitung ausgearbeitet hatten. Als ergänzende Bücher zum vertiefenden Selbststudium empfehle ich

- Michael Spivak — Calculus on Manifoldes (W.A.Benjamin, Inc.).
- Serge Lang — Analysis (Inter European Editions).

Ich danke herzlich Frau Karin Schütz, die das Kapitel über Integralrechnung in LaTeX gesetzt hat. Die Übungsaufgaben aus dem Anhang B stammen von Herrn Dr. Georg Illies, der nicht nur dadurch zum Gelingen der Lehrveranstaltung beigetragen hat, und dem an dieser Stelle ausdrücklich gedankt sei.

Siegen im Juli 2001 Nils-Peter Skoruppa

**Bezeichnungen**

Wir benutzen durchweg die Bezeichnungen aus der Analysis I. Insbesondere erinnern wir daran, daß $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen einschließlich der Zahl 0 bedeutet. Für die positiven natürlichen Zahlen, wie auch für negative reelle Zahlen und ähnlich, benutzen wir sich selbst erklärende Notationen wie $\mathbb{Z}_{>0}$, $\mathbb{R}_{<0}$, etc.. Mit $\mathbb{R}^{m\times n}$ bezeichnen wir die Menge aller Matrizen mit $m$ Zeilen, $n$ Spalten und reellen Einträgen; gelegentlich benutzen wir auch $\mathbb{C}^{m\times n}$, $\mathbb{Z}^{m\times n}$, ... mit entsprechender analoger Bedeutung. Die Menge der Zeilenvektoren der Länge $n$ wird demnach mit $\mathbb{R}^{1\times n}$ bezeichnet. Statt $\mathbb{R}^{m\times 1}$ schreiben wir für Spaltenvektoren auch einfacher $\mathbb{R}^m$. Ist $M$ eine Menge und $Y$ ein reller Vektorraum, so ist die Menge $\mathrm{Abb}(M, Y)$ aller Abbildungen $U \to Y$ wieder ein reller Vektorraum, wenn man Summe und Skalarmultiplikation durch die Formeln $(f+g)(m) = f(m) + g(m)$ und $(rf)(m) = r(f(m))$ erklärt. Mit $\mathrm{Hom}(X, Y)$ bezeichnen wir die Menge aller linearen Abbildungen $X \to Y$. Dies ist dann auch ein Vektorraum, nämlich ein Untervektorraum von $\mathrm{Abb}(X, Y)$.

# Inhaltsverzeichnis

# Kapitel 1

# Topologische Grundbegriffe

In dieser Vorlesung geht es darum, die grundlegenden Begriffe der Theorie der reellwertigen Funktionen in $n \geq 1$ Veränderlichen zu entwickeln. Die möglichen Argumente einer solchen Funktion sind also $n$-Tupel von reellen Zahlen. Jedes solche $n$-Tupel repräsentiert einen Punkt im $\mathbb{R}^n$, dem aus der linearen Algebra bekannten Standardvektorraum

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

Man beachte, daß die Elemente von $\mathbb{R}^n$ als Spalten geschrieben sind. Wie schon mit dem Wort Vektorraum angedeutet, besitzt die Menge $\mathbb{R}^n$ Zusatzstruktur. Man kann zwei Elemente des $\mathbb{R}^n$ addieren:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix},$$

oder man kann ein Element des $\mathbb{R}^n$ mit einer reellen Zahl, einem Skalar, multiplizieren:

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}.$$

Es ist der logischen Klarheit wegen oft günstig, den Betrachtungen statt des $\mathbb{R}^n$ einen abstrakten reellen Vektrorraum $X$ zu Grunde zu legen. Wo dieser abstrakte Standpunkt wirklich nützlich erscheint, werden wir dies im Folgenden auch tun. Ist $X$ endlich-dimensional, so ist $X$ nach bekannten Tatsachen aus der linearen Algebra isomorph zum $\mathbb{R}^n$, d.h. man kann sich dann $X$ durchaus stets als $\mathbb{R}^n$ vorstellen, wenn das dem Verständnis helfen sollte.

In diesem Kapitel werden wir uns noch nicht mit reellwertigen Funktionen auf Vektorräumen beschäftigen, sondern zunächst einige geometrische Grundbegriffe in reellen Vektorräumen — und sogar in allgemeinen metrischen Räumen — entwickeln. Diese Grundbegriffe werden in späteren Kapiteln einen erheblichen Teil der Sprache bilden, mit Hilfe derer wir Funktionen in mehreren Variablen untersuchen werden.

## 1.1 Normierte Vektorräume

Sei $X$ ein reeller Vektorraum. Der anschauliche Begriff der Länge eines Vektors wird mathematisch durch den Begriff der Norm wiedergegeben.

Norm

**Definition.** Eine *Norm* eines $\mathbb{R}$-Vektorraums $X$ ist eine Abbildung $X \to \mathbb{R}$, die jedem $x \in X$ eine reelle Zahl $\|x\|$ so zuordnet, daß folgende Axiome gelten:

**(N1)** $\forall x \in X: \quad x = 0 \Rightarrow \|x\| = 0$,

**(N2)** $\forall x \in X: \quad x \neq 0 \Rightarrow \|x\| > 0$,

**(N3)** $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ x \in X: \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$,

**(N4)** $\forall x, y \in X: \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Normierter Vektorraum

Ein reeller Vektorraum zusammen mit einer Norm heißt *normierter Vektorraum.*

*Beispiel.* Es sei $X = \mathbb{R}^n$. Für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in X$ sei

$$\|x\| := \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

Hierdurch wird eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ definiert: Die Gültigkeit von (N1) und (N2) ist klar. (N3) gilt wegen

$$\|\lambda x\| = \sum_{i=1}^{n} |\lambda x_i| = \sum_{i=1}^{n} (|\lambda| \cdot |x_i|) = |\lambda| \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |\lambda| \cdot \|x\|.$$

(N4) gilt wegen

$$\|x + y\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|) = \|x\| + \|y\|.$$

Für $n = 1$ ist $\|x\|$ der gewöhnliche Absolutbetrag, wie wir ihn in der Analysis I als Norm auf $\mathbb{R}$ benutzt haben.

*Beispiel.* Ebenso wird durch

$$\|x\|_\infty := \max_{1\le i\le n} |x_i|$$

eine Norm auf dem $\mathbb{R}^n$ definiert, die sogenannte *Maximum-Norm.*

Maximum-Norm

*Beispiel.* Wir betrachten $X = C^0([a,b])$, den Vektorraum aller stetigen Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, versehen mit der Addition $f+g$ definiert durch $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ und der skalaren Multiplikation $\lambda f$ definiert durch $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$. Auf $X$ wird durch

$$\|f\| = \int_a^b |f(x)|\ dx$$

eine Norm definiert: (N1) gilt wegen der Linearität des Integrals. Zum Nachweis von (N2) sei $f \not\equiv 0$, d.h. es gebe ein $\xi \in [a,b]$ mit $f(\xi) \neq 0$. Dann gibt es wegen der Stetigkeit von $f$ ein $\epsilon > 0$, so daß $|f(x)| > k$ mit einer geeigneten Konstanten $k > 0$ für alle $x \in [\xi - \epsilon, \xi + \epsilon]$ gilt. Damit ist dann

$$\int_a^b |f(x)|dx \ge \int_{\xi-\epsilon}^{\xi+\epsilon} |f(x)|dx \ge \int_{\xi-\epsilon}^{\xi+\epsilon} k\ dx = 2\epsilon k > 0.$$

Die Axiome (N3) und (N4) folgen aus der Linearität und der Monotonie des Integrals.

*Übung.* Sei $p > 0$ eine reelle Zahl. Für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ setzen wir

$p$-Norm

$$\|x\|_p := \left(\sum_{n=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Man zeige, daß hierdurch eine Norm auf dem $\mathbb{R}^n$ definiert wird.

*Übung.* In den Bezeichnungen der vorangehenden Übung zeige man für jedes $x \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty.$$

## 1.2 Euklidische Vektorräume

Spezielle Normen sind solche, die sich aus einem Skalarprodukt herleiten.

**Definition.** Es sei $X$ ein reeller Vektorraum. Ein Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ ist eine Abbildung $X \times X \to \mathbb{R}$, die folgende Eigenschaften erfüllt:

Skalarprodukt

**(SP1)** $\forall x, y \in X : \quad \langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle,$

**(SP2)** $\forall x, y, z \in X: \quad \langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle,$

**(SP3)** $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ x, y \in X: \quad \langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle,$

**(SP4)** $\forall x \in X: \quad x \neq 0 \Rightarrow \langle x, x\rangle > 0.$

Euklidischer Vektorraum

Einen reellen Vektorraum zusammen mit einem Skalarprodukt nennt man *euklidischen Vektorraum.*

*Bemerkung.* Bei fest gehaltenem $y$ ist die Abbildung $x \mapsto \langle x, y\rangle$ nach (N2) und (N3) linear. Da das Skalarprodukt nach (N1) symmetrisch ist, so ist bei fest gehaltenem $x$ auch die Abbildung $y \mapsto \langle x, y\rangle$ linear.

Standardskalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$

*Beispiel.* Es sei $X = \mathbb{R}^n$. Dann wird mit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ durch

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

ein Skalarprodukt auf $X$ definiert. Dieses heißt das *Standardskalarprodukt* für den $\mathbb{R}^n$.

*Beispiel.* Wir betrachten den Vektorraum $C^0([a, b])$. Analog zum Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ definieren wir hier:

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\ dx.$$

(SP1) – (SP3) sind offensichtlich erfüllt, (SP4) folgt mit ähnlichen Argumenten wie oben (N2) für die Norm $\|f\| = \int_a^b |f(x)|dx$. Man beachte, daß $C^0([a, b])$ eine Beispiel füer einen unendlich-dimensionalen, euklidischen Vektorraum ist.

In jedem euklidischen Vektorraum $X$ hat man eine natürliche Norm, nämlich die *Betragsnorm*

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

Für $X = \mathbb{R}$ hat man insbesondere $\|x\| = \sqrt{x^2} = |x|$. Um zu beweisen, daß $\|x\| := \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$ tatsächlich eine Norm definiert, benötigen wir die folgende Ungleichung:

Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

**Satz.** *Sei $X$ ein euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$, und seien $x, y$ zwei Vektoren in $X$. Dann gilt:*

$$\langle x, y\rangle^2 \leq \langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle.$$

*Es gilt Gleichheit genau dann, wenn $x$ und $y$ linear abhängig sind.*

*Beweis.* Wir nehmen zunächst $x$ und $y$ als linear unabhängig an. Für jedes reelle $\lambda$ ist dann

$$\langle x - \lambda y, x - \lambda y \rangle > 0.$$

Weiter ist

$$\langle x - \lambda y, x - \lambda y \rangle = \langle x, x \rangle - 2\lambda \langle x, y \rangle + \lambda^2 \langle y, y \rangle.$$

Also hat die quadratische Gleichung

$$\langle y, y \rangle \lambda^2 - 2\lambda \langle x, y \rangle + \langle x, x \rangle = 0$$

keine reelle Lösung $\lambda$. (Man beachte, daß nach unserer Annahme insbesondere $y \neq 0$, also $\langle y, y \rangle > 0$ ist.) Daher ist die Diskriminante dieser quadratischen Gleichung negativ, in Formeln

$$\langle x, y \rangle^2 - \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \leq 0,$$

und dies ist gerade die gewünschte Ungleichung.

Sind $x$ und $y$ linear abhängig, so hat man immerhin noch $\langle x - \lambda y, x - \lambda y \rangle \geq 0$, es hat aber jetzt die Gleichung $\langle x - \lambda y, x - \lambda y \rangle = 0$ genau eine reelle Lösung. Daher ist die eben betrachtete Diskriminante gleich 0. (Streng genommen ist dabei $y \neq 0$ vorauszusetzen, damit wir wirklich eine quadratische Gleichung vorliegen haben. Der Fall $y = 0$ in der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung ist ober ohnehin evident.)

Daß Gleichheit in der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung umgekehrt impliziert, daß $x$ und $y$ linear abhängig sind, lassen wir als Übungsaufgabe. □

Aus der eben bewiesenen Ungleichung folgt nun sofort

**Satz.** *Ist $X$ ein euklidischer Vektorraum, dann definiert $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ eine Norm auf $X$.*

*Beweis.* Der Nachweis von (N1) und (N2) ist trivial, und (N3) gilt wegen

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x, x \rangle} = |\lambda| \cdot \|x\|.$$

Die Eigenschaft (N4) ist äquivalent zu $\|x + y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2$. Dies erhält man wiederum mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \\ &\leq \langle x, x \rangle + 2\sqrt{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle} + \langle y, y \rangle \\ &\leq \|x\|^2 + 2 \cdot \|x\| \cdot \|y\| + \|y\|. \end{aligned}$$

□

*Bemerkung.* Nach dem Satz erhält man nun sofort, daß

- $\|x\|_2 := \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ eine Norm auf dem $\mathbb{R}^n$,
- $\|f\| := \sqrt{\int_a^b f^2(x)\ dx}$ eine Norm auf $C^0([a,b])$ definiert.

In einem euklidischen Vektorraum kann man den Begriff des Winkels zwischen zwei Vektoren einführen. Nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung haben wir ja

$$\|\langle x, y\rangle\| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Sind $x, y \neq 0$, so ist also

$$-1 \leq \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq +1.$$

Nach Ergebnissen aus der Analysis I gibt es daher genau ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq \alpha < \pi$, sodaß

$$\cos\alpha = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}.$$

Winkel

**Definition.** Das durch vorstehende Gleichung definierte $\alpha \in [0, \pi)$ heißt der *nichtorientierte* Winkel zwischen den Vektoren $x$ und $y$.

*Beispiel.* Wir betrachten den euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt. Es seien $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ zwei Vektoren der Länge 1, d.h.

$$\|x\| = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}} = 1, \quad \|y\| = (y_1^2 + y_2^2)^{\frac{1}{2}} = 1.$$

Dann gibt es nach einem Satz aus der Analysis I reelle Zahlen $\alpha, \beta \in [0, 2\pi)$, sodaß

$$\mathrm{e}^{i\alpha} = x_1 + ix_2, \quad \mathrm{e}^{i\beta} = y_1 + iy_2,$$

oder, anders formuliert, sodaß

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix}.$$

Diese Zahlen $\alpha$ und $\beta$ sind die exakte Definition der Größen, die man in der Schulmathematik als (orientierte) Winkel zwischen der reellen Achse und $x$ bzw. der reellen Achse und $y$ hingemalt hat. Für den nichtorientierten Winkel $\varphi$ zwischen $x$ und $y$ hat man nun

$$\cos\ \varphi = \frac{x_1y_1 + x_2y_2}{1 \cdot 1} = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta = \cos\ (\alpha - \beta).$$

bb Es ist also $\varphi = \alpha - \beta$ oder $\varphi = 2\pi - (\alpha - \beta)$. Hieraus erkennt man, warum für das oben abstrakt definierte $\varphi$ der Name nichtorientierter Winkel zwischen $x$ und $y$ eingeführt wurde.

Cosinus-Satz

**Satz.** *Für Vektoren $a$ und $b$ eines euklidischen Vektorraums $X$ mit nichtorientiertem Winkel $\alpha$ gilt die Identiät*

$$\|b - a\|^2 = \|b\|^2 + \|a\|^2 - 2\|a\| \cdot \|b\|\ \cos\alpha.$$

*Bemerkung.* Stehen $a$ und $b$ *senkrecht aufeinander* (d.h., gilt $\alpha = 0$, oder - äquivalent - $\langle a, b\rangle = 0$), so wird der Cosinus-Satz zu

$$\|b-a\|^2 = \|b\|^2 + \|a\|^2.$$

Für $X = \mathbb{R}^2$ ist dies der bekannte Satz des Pythagoras, wenn man das Dreieck betrachtet, welches man erhält, wenn man als Eckpunkte 0 und die Spitzen der Vektoren $a$ und $b$, gezeichnet mit Fußpunkt in 0, wählt.

*Beweis des Cosinus-Satzes.* In der Tat ist ja

$$\begin{aligned}\|b-a\|^2 &= \langle b-a, b-a\rangle = \langle b, b\rangle - 2\langle a, b\rangle + \langle a, a\rangle \\ &= \|b\|^2 - 2\|a\| \cdot \|b\| \, \cos\alpha + \|a\|^2\end{aligned}$$

$\square$

## 1.3 Metrische Räume

Wir haben gesehen, daß ein euklidischer Vektorraum (wie z.B. der $\mathbb{R}^n$) insbesondere ein normierter Vektorraum ist. Auf einem normierten Vektorraum kann man — wie wir gleich sehen werden — den Begriff des Abstands einführen. Damit wird ein normierten Vektorraum zu einem metrischen Raum. Auf einem metrischen Raum kann man schließlich einen Umgebungs- und Konvergenzbegriff einführen, wie wir sie benötigen, um die Methoden der Analysis I auf den Fall von Funktionen in mehreren Veränderlichen zu übertragen.

**Definition.** Sei $X$ eine Menge. Eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}$ heißt *Metrik auf* $X$, falls gilt:

Metrik

**(M1)** $\forall x \in X : \; d(x, x) = 0,$

**(M2)** $\forall x, y \in X : \; x \neq y \Rightarrow d(x, y) > 0,$

**(M3)** $\forall x, y \in X : \; d(x, y) = d(y, x),$

**(M4)** $\forall x, y, z \in X : \; d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$

Das Paar $(X, d)$ heißt dann ein *metrischer Raum.*

Metrischer Raum

*Übung.* Sei $X$ eine Menge mit 4 Elementen. Bestimme alle Metriken auf $X$ mit Werten in der Menge $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$.

*Übung.* Sei $X$ die Menge aller Teilmengen einer endlichen Menge $M$. Zeige, daß durch

$$d(A,B) := \text{Anzahl der Elemente von } (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

eine Metrik auf $X$ erklärt wird.

**Satz.** *Sei $X$ ein normierter Vektorraum mit Norm $\|\cdot\|$. Dann wird durch*

$$d(x,y) := \|x-y\|$$

*eine Metrik auf $X$ erklärt (die durch die Norm induzierte Metrik).*

*Beweis.* Die Axiome für eine Metrik sind unmittelbar nachzuprüfen. So erhält man zum Beispiel (M4) folgendermaßen:

$$d(x,z) = \|x-z\| = \|x-y+y-z\| \leq \|x-y\| + \|y-z\| = d(x,y) + d(y,z).$$

□

Offene Mengen

**Definition.** Es sei $X$ ein metrischer Raum, sei $A \subseteq X$ und $a \in X$.

- Für $\epsilon > 0$ heißt die Menge $U_\epsilon(a) := \{X \in X \mid d(x,a) < \epsilon\}$ *$\epsilon$-Umgebung* von $a$.
- Der Punkt $a \in X$ heißt *innerer Punkt von $A$* genau dann, wenn $U_\epsilon(a) \subseteq A$ für mindestens ein $\epsilon > 0$ gilt.
- Die Menge $A^\circ := \{a \in X \mid a \text{ ist innere Punkt von } A\}$ heißt das *Innere von $A$*.
- $A$ heißt *offen* genau dann, wenn $A = A^\circ$ gilt.
- Eine Menge $U \subseteq X$ heßt *offene Umgebung von $a$*, falls $U$ offen ist und $a$ enthält.

*Übung.* Es sei $X = \mathbb{R}$ versehen mit der durch den Absolutbetrag induzierten Metrik. Sei $I$ ein Intervall. Zeige: $I$ ist offen (im Sinne der obigen Definition) genau dann, wenn $I$ ein offenes Intervall (im Sinne der Definition aus der Analysis I) ist.

*Übung.* Man skizziere im $\mathbb{R}^2$ jeweils die Mengen $U_1(0)$ bezüglich der durch $\|\cdot\|_p$ $(p = 1, 2, 4, \infty)$ induzierten Metriken.

*Übung.* Man veranschauliche sich die Mengen $U_r(0)$ im $\mathbb{R}^3$ bezüglich der durch das Standardskalarprodukt induzierten Metrik.

*Übung.* Zeige, daß in einem endlichem metrischen Raum jede Menge offen ist.

**Satz.** *Es sei $X$ ein metrischer Raum und $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie*[1] *offener Mengen von $X$. Dann gilt:*

1. *Die Mengen $\emptyset$ und $X$ sind offen.*
2. *Ist $I$ endlich, so ist $\bigcap_{i\in I} A_i$ offen.*
3. *Es ist $\bigcup_{i\in I} A_i$ offen.*

*Bemerkung.* Ein Paar $(X, \mathcal{T})$, wo $X$ eine Menge ist, und wo $\mathcal{T}$ ein System von Teilmengen von $X$ ist, welches die Eigenschaften (i) bis (iii) erfüllt (d.h. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$ und für jede Familie von Mengen in $\mathcal{T}$ ist auch ihre Vereinigung und — falls die Familie endlich ist — auch ihr Durchschnitt in $\mathcal{T}$) nennt man *topologischer Raum*, man nennt $\mathcal{T}$ die Topologie auf $X$ und die Elemente von $\mathcal{T}$ die offenen Mengen. Wir werden uns aber im Folgenden nur auf solche topologischen Räume beschränken, wo die Topologie wie in der obigen Definition durch eine Metrik erklärt wird.

*Beispiel.* Der Eigenschaft (ii) des vorstehenden Satzes läßt sich nicht auf eine unendliche Familie von offenen Mengen verallgemeinern. Sei z.B. $X = \mathbb{R}$, versehen mit der durch den Absolutbetrag induzierten Metrik. Dann sind die Mengen $U_{\frac{1}{n}} = (-\frac{1}{n}, +\frac{1}{n})$ für alle $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ offen (siehe unten), der Durchschnitt $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_{\frac{1}{n}}(0) = \{0\}$ ist aber nicht offen.

*Beweis des Satzes.* Die Aussage (i) ist unmittelbar nach Definition klar.

Zum Nachweis der zweiten Aussage sei $a \in B := \bigcap_{i\in I} A_i$. Dann gibt es — da ja $A_i$ offen ist — zu jedem $i$ ein $\epsilon_i > 0$, sodaß $U_{\epsilon_i}(a) \subseteq A_i$. Wir setzen $\epsilon = \inf\{\epsilon_i \mid i \in I\}$. Da $I$ endlich ist, habe wir $\epsilon > 0$. Offenbar ist $U_\epsilon(a) \subseteq U_{\epsilon_i}(a)$, also $U_\epsilon(a) \subseteq B$.

Ist schließlich $a \in C := \bigcup_{i\in I} A_i$, so ist $a \in A_j$ für ein $j \in I$, also — da $A_j$ ja offen ist — $U_\epsilon(a) \subseteq A_j$ für ein geeignetes $\epsilon > 0$, dann aber auch $U_\epsilon(a) \subseteq C$. $\square$

**Satz.** *Sei $X$ ein metrischer Raum, $a \in X$ und $\epsilon > 0$. Dann ist $U_\epsilon(a)$ offen.*

*Beweis.* Sei $x \in U_\epsilon(a)$. Wir haben zu zeigen, daß $x$ innerer Punkt von $U_\epsilon(a)$ ist. In der Tat gilt

$$U_{\epsilon - d(x,a)}(x) \subseteq U_\epsilon(a).$$

Dies ist nämlich äquivalent zu

$$\forall y \in X : \quad d(x,y) < \epsilon - d(x,a) \Rightarrow d(y,a) < \epsilon,$$

[1] Das ist eine Abbildung, die jedem $i$ einer Menge $I$ (der sogenannten Indexmenge) eine Teilmenge $A_i$ von $X$ zuordnet.

d.h. zu
$$\forall y \in X: \quad d(y,x) + d(x,a) < \epsilon \Rightarrow d(y,a) < \epsilon,$$
was wahr ist, da ja nach (M4)
$$d(y,a) \leq d(y,x) + d(x,a)$$
gilt. □

Abgeschlossene Mengen

**Definition.** Sei $X$ ein metrischer Raum, $A \subseteq X$ und $a \in X$.

- $a \in X$ heißt *Berührungspunkt* von $A$ genau dann, wenn gilt
$$\forall \epsilon > 0: \quad U_\epsilon(a) \cap A \neq \emptyset.$$
- Die Menge $\overline{A} := \{a \in X \mid a$ ist Berührungspunkt von $A\}$ heißt die *abgeschlossene Hülle* von $A$.
- $A$ heißt *abgeschlossen* genau dann, wenn $A = \overline{A}$ gilt.

**Satz.** *Sei $A$ eine Teilmenge eines metrischen Raumes $X$. Dann ist $A$ abgeschlossen genau dann, wenn $X \setminus A$ offen ist.*

*Beweis.* Sei $A \subseteq X$ eine beliebige Teilmenge und $a \in X$. Wir haben dann die folgenden Äquivalenzen:
$$\begin{aligned} a \in X \setminus \overline{A} &\iff a \notin \overline{A} \iff \exists\, \epsilon > 0: \ U_\epsilon(a) \subseteq X \setminus A \\ &\iff a \text{ innerer Punkt von } X \setminus A \iff a \in (X \setminus A)^\circ. \end{aligned}$$
Somit haben wir
$$X \setminus \overline{A} = (X \setminus A)^\circ.$$
Ist nun $A$ abgschlossen, also $\overline{A} = A$, so wird die vorstehende Gleichung zu $X \setminus A = (X \setminus A)^\circ$, d.h. $X \setminus A$ ist offen.

Setzen wir in obiger Gleichung $A = X \setminus B$, wo $B$ eine beliebige Teilmenge von $X$ ist, so erhalten wir $X \setminus \overline{(X \setminus B)} = B^\circ$, und durch Übergang zu Komplementen
$$\overline{(X \setminus B)} = X \setminus B^\circ.$$
Ist jetzt $B$ offen, also $B^\circ = B$, so wird dies zu $\overline{(X \setminus B)} = X \setminus B$, d.h. $X \setminus B$ ist abgeschlossen. □

Nach dem vorstehenden Satz sind die Begriffe offen und abgeschlossen dual zueinander: Durch übergang zu den koplementären Mengen erhält man aus jeder wahren Aussage über offene Mengen eine wahre über abgeschlossene Mengen. Man nennt diesen logischen Schluß auch *dualisieren*. Ein Bespiel hierfür ist der folgende Satz.

**Satz.** *Sei $X$ ein metrischer Raum und $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie abgeschlossener Teilmengen von $X$. dann gilt:*

1. *$\emptyset$ und $X$ sind abgeschlossen.*
2. *Ist $I$ endlich, so ist $\bigcup_{i\in I} A_i$ abgschlossen.*
3. *Es ist $\bigcap_{i\in I} A_i$ abgeschlossen.*

*Beweis.* Als Beispiel beweisen wir (iii). Es ist $X \setminus A_i$ offen für jedes $i$, nach dem Hauptsatz über offene Mengen ist dann auch $\bigcup_{i\in I}(X \setminus A_i)$ offen. Also ist $X \setminus \bigcup_{i\in I}(X \setminus A_i)$ abgeschlossen. Nach den Identitäten von de Morgan ist aber

$$X \setminus \bigcup_{i\in I}(X \setminus A_i) = \bigcap_{i\in I}(X \setminus (X \setminus A_i)) = \bigcap_{i\in I} A_i.$$

□

*Übung.* Sei $A$ Teilmenge eines metrischen Raumes $X$. Beweise:

$$(A^\circ)^\circ = A, \quad \overline{(\overline{A})} = A.$$

Das Innere einer Menge ist also offen, und der Abschluß einer Menge ist abgeschlossen.

## 1.4 Konvergenz von Punktfolgen

Konvergente Folgen

**Definition.** Es sei $X$ ein metrischer Raum mit Metrik $d$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Punkten in $X$[2] . Die Folge $(x_n)$ heißt *konvergent* gegen $a$, falls gilt:

$$\forall \epsilon > 0\, \exists n_0\, \forall n \geq n_0 : \; d(x_n, a) < \epsilon.$$

Der Punkt $a$ heißt *Grenzwert* der Folge $(x_n)$.

*Bemerkung.* Die Bedingung der Konvergenz kann man auch äquivalent durch jede der folgenden Aussagen beschreiben:

- $\forall \epsilon > 0\, \exists n_0\, \forall n \geq n_0 : \; x_n \in U_\epsilon(a)$.
- Für jede offene Umgebung $U$ von $a$ gilt: $\exists n_0\, \forall n \geq n_0 : \; x_n \in U$.
- In jeder offenen Umgebung von $a$ liegt $x_n$ für fast alle $n$.

[2] Dies ist eine Abbildung $\mathbb{N} \to X$, $n \mapsto x_n$. Den Index „$n \in N$“ lassen wir im Folgenden gelegentlich weg, falls dies nicht zu Mißverständnissen führt.

*Bemerkung.* Ist $X = \mathbb{R}$ mit der durch den Absolutbetrag induzierten Standardmetrik, so stimmt der soeben eingeführte Begriff einer konvergenten Folge mit dem in der Analysis I eingeführten überein.

**Satz.** *Sei $(x_n)$ Folge von Punkten in einem metrischen Raum $X$. Konvergiert $(x_n)$ gegen $a$ und gegen $b$, so folgt $a = b$.*

*Bemerkung.* Der Grenzwert $a$ einer konvergenten Folge $(x_n)$ ist also eindeutig bestimmt. Wir bezeichnen ihn auch mit

$$a = \lim_n x_n.$$

*Beweis des Satzes.* Wir führen die Annahme $a \neq b$ zum Widerspruch: Für $a \neq b$ ist jedenfalls $\epsilon := d(a,b)/2 > 0$. Daher gibt es nach Voraussetzung ein $n$ mit $x_n \in U_\epsilon(a)$ und $x_n \in U_\epsilon(b)$. Es ist also $d(x_n, a) < \epsilon$ und $d(x_n, b) < \epsilon$, und daher nach der Dreiecksungleichung $2\epsilon = d(a,b) \leq d(a, x_n) + d(x_n, b) = 2\epsilon$. Ein Widerspruch. $\square$

*Übung.* Sei $X = \mathbb{R}^k$ mit der durch die Maximum-Norm $\|\cdot\|_\infty$ induzierten Metrik. Zeige: Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Punkten des $\mathbb{R}^k$ konvergiert genau dann, wenn jede der *Komponentenfolgen* $(x_n^{(i)})_{n\in\mathbb{N}}$ $(1 \leq i \leq k)$ konvergiert, wobei wir die Bezeichnung

$$x_n = \begin{pmatrix} x_n^{(1)} \\ \vdots \\ x_n^{(1)} \end{pmatrix}$$

benutzen. Es gilt dann

$$\lim_n x_n = \begin{pmatrix} \lim_n x_n^{(1)} \\ \vdots \\ \lim_n x_n^{(k)} \end{pmatrix}.$$

Ein wichtiger, uns aus der Analysis I im Fall $X = \mathbb{R}$ schon bekannter Existenzsatz über konvergente Folgen ist der folgende.

Satz von Bolzano-Weierstraß

**Satz.** *Bezüglich der Maximum-Norm und der dadurch induzierten Metrik auf dem $\mathbb{R}^k$ gilt: Jede beschränkte Folge*[3] *$(x_n)$ im $\mathbb{R}^k$ besitzt eine konvergente Teilfolge.*

*Bemerkung.* Wir werden später sehen, daß alle Normen auf dem $\mathbb{R}^k$ in dem Sinne äquivalent sind, daß der Begriff der Konvergenz und Beschränktheit von der jeweils gewählten Norm unabhängig ist. Der vorstehende Satz gilt also bezüglich jeder Norm auf dem $\mathbb{R}^k$.

[3] Eine Folge $(x_n)$ eines normierten Raums $X$ nennen wir beschränkt, falls eine Konstante $M$ existiert, sodaß $\|x_n\| \leq M$ für alle $n$ gilt.

*Beweis.* Für Folgen reeller Zahlen ist der Satz ja bereits gezeigt. Unmittelbar aus der Definition der Maximum-Norm folgt: Eine Folge $(x_n)$ im $\mathbb{R}^k$, ist dann und nur dann beschränkt, wenn alle Komponentenfolgen $(x_n^{(i)})$, $1 \leq i \leq k$, beschränkt sind. Dann gibt es aber eine Teilfolge $(x_{\phi_1(n)})$ der Folge $(x_n)$, für die die Komponentenfolge $(x_{\phi_1(n)}^{(1)})$ konvergiert. Genauso hat dann wiederum diese Teilfolge eine Teilfolge $(x_{\phi_1(\phi_2(n))})$, für die die Komponentenfolge $(x_{\phi_1(\phi_2(n))}^{(2)})$ konvergiert. Fährt man mit den so erhaltenen Teilfolgen fort für alle $k$ Komponenten, so erhält man schließlich eine Teilfolge $(x_{n_k})$ der Folge $(x_n)$, für die alle Komponentenfolgen konvergieren. Nach der oben stehenden Übung ist dann aber auch $(x_{n_k})$ konvergent. □

**Definition.** Eine Folge $(x_n)$ eines metrischen Raumes $X$ heißt *Cauchy-Folge*, falls gilt:

Cauchy-Folge

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists n_0 \, \forall m, n > 0 : \; d(x_m, x_n) < \epsilon.$$

**Satz.** *Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.*

*Beweis.* Sei $(x_n)$ eine konvergente Folge und etwa $a = \lim_{n\to\infty} x_n$. Dann kann man zu jedem gegebenen $\epsilon > 0$ ein $n_0$ finden mit $d(x_n, c) < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $n \geq n_0$. Sind dann $m, n \geq n_0$, so gilt

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, c) + d(c, x_n) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

□

In der Analysis I haben wir bewiesen, daß für Folgen reeller Zahlen auch die Umkehrung gilt. Für allgemeine metrische Räume braucht dies aber nicht der Fall zu sein.

*Beispiel.* Die Folge $(x_n)$ mit $x_n = 1/n$, aufgefaßt als Folge im metrischen Raum $X = (0, 1]$ (mittels dem gewöhnlichen Absolutbetrag als Norm) ist eine Cauchy-Folge, aber nicht konvergent in $X$.

**Definition.** Ein metrischer Raum $X$ heißt *vollständig*, wenn jede Cauchy-Folge konvergiert. Ein normierter Vektorraum $X$ heißt *Banach-Raum*, wenn er bezüglich der induzierten Metrik $d(x, y) = \|x - y\|$ $(x, y \in X)$ vollständig ist.

Vollständigkeit
Banach-Raum

**Satz.** *Der $\mathbb{R}^n$, als metrischer Raum vermöge der durch die Maximum-Norm induzierten Metrik, ist vollständig.*

Vollständigkeit des $\mathbb{R}^n$

*Bemerkung.* Es ist also $\mathbb{R}^k$ (hier zunächst nur bezüglich der Maximum-Norm) ein Banach-Raum. Da wir im nächsten Abschnit sehen werden, daß der Begriff der Cauchy-Folge und der Konvergenz gar nicht von der jeweils auf dem $\mathbb{R}^k$ gewählten Norm abhängt, ist der $\mathbb{R}^k$ daher bezüglich jeder Norm ein Banach-Raum.

*Beweis des Satzes.* Sei $(x^{(n)})$ eine Cauchy-Folge im $\mathbb{R}^n$. Da

$$|x_i^{(m)} - x_i^{(n)}| \leq \|x^{(m)} - x^{(n)}\|_\infty$$

für alle $i,\ 1 \leq i \leq n$ gilt, sieht man, daß jede Komponentenfolge $(x_n^{(i)})$ eine Cauchy-Folge ist. Nach einem Satz aus der Analysis I konvergiert $(x_i^{(n)})$. Nach einer der obigen Übungen konvergiert dann auch $(x_n)$. □

Der Begriff der gleichmäßigen Konvergenz von Funktionenfolgen aus der Analysis I liefert uns ein Beispiel eines unendlich dimensionalen Banach-Raums.

Supremum-Norm

**Satz.** *Der Raum $C^0([a,b])$ der auf einem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ definierten und stetigen Funktionen, versehen mit der Supremum-Norm $\|f\| := \sup\{|f(x)|;\ x \in [a,b]\}$, ist ein Banach-Raum.*

*Beweis.* Wir lassen es als Übungsaufgabe, nachzuweisen, daß die Supremum-Norm tatsächlich die Axiome einer Norm erfüllt.

Zu zeigen ist, daß jede Cauchy-Folge von stetigen Funktionen gleichmäßig (d.h. bezüglich der Supremum-Norm) gegen eine Funktion konvergiert, die zudem noch stetig ist. Sei also $(f_n)$ eine Cauchy-Folge in $C^0([a,b])$. Wegen

$$|f_m(x_0) - f_n(x_0)| \leq \|f_m - f_n\| = \sup\{|f_m(x) - f_n(x)|, x \in [a,b]\}$$

folgt, daß für jedes fest gewählte $x_0 \in [a,b]$ die Zahlenfolge $(f_n(x_0))$ eine Cauchy-Folge ist, daher also konvergiert. Somit ist $(f_n)$ punktweise konvergent, etwa gegen die Funktion $f$.

Dann ist aber $(f_n)$ sogar gleichmäßig konvergent gegen $f$. Sei nämlich $\epsilon > 0$ gegeben. Dann existiert nach Voraussetzung ein $n_0$, so daß für alle $x_0$ und alle $m, n \geq n_0$ gilt:

$$|f_n(x_0) - f_m(x_0)| \leq \|f_n - f_m\| < \epsilon/2.$$

Es folgt

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| \leq |f_n(x_0) - f_m(x_0)| + |f_m(x_0) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{2} + |f_m(x_0) - f(x_0)|.$$

Wegen $\lim_{m\to\infty} |f_m(x_0) - f(x_0)| = 0$ folgt

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \epsilon/2 < \epsilon.$$

Dies gilt aber für alle $x_0$, also folgt $\|f_n - f\| < \epsilon$, und das wollten wir zeigen.

Es bleibt die Stetigkeit von $f$ nachzuweisen. Nach einem bekannten Satz der Analysis I folgt diese aber aus der gleichmäßigen Konvergenz von $(f_n)$ gegen $f$ und der Stetigkeit der $f_n$. □

## 1.5 Aequivalenz von Normen

Ein Beispiel soll das Thema dieses Abschnitts veranschaulichen.

*Beispiel.* Wir betrachten den Vektorraum $C^0([0,1])$ mit den beiden Normen

$$\|f\|_1 = \sqrt{\int_0^1 f(x)^2 dx}, \qquad \|f\|_2 = \sup\big\{|f(x)| \;\big|\; x \in [0,1]\big\}.$$

Ferner betrachten wir die Folge $(f_n)$ mit $f_n = x^n$. Es gilt

$$\|f_n\|_1 = \sqrt{\int_0^1 x^{2n} dx} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Also ist die Folge $(f_n)$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_1$ konvergent gegen die Funktion 0.

Andererseits ist die Folge nicht konvergent bezüglich der Norm $\|\cdot\|_2$. Denn sonst würde sie ja insbesondere punktweise gegen eine stetige Funktion konvergieren, wogegen aber $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = 0$ für $0 \le x < 1$ und $\lim_{n\to\infty} f_n(1) = 1$ gilt, die Grenzfunktion bezüglich der punktweisen Konvergenz also nicht stetig ist.

Unterschiedliche Normen führen also im Allgemeinen zu unterschiedlichen Konvergenzbegriffen. Uns interessiert nun, wann verschiedene Normen zu gleichen Begriffen führen.

Äquivalenz von Normen

**Definition.** Es sei $X$ ein Vektorraum. Zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ auf $X$ heißen *äquivalent* genau dann, wenn es reelle Konstanten $c, d > 0$ gibt, so daß für alle $x \in X$

$$c \cdot \|x\|_1 \le \|x\|_2 \le d \cdot \|x\|_1$$

gilt.

*Bemerkung.* Dies definiert eine Äquivalenzrelation[4] auf der Menge aller Normen auf $X$. Die Symmetrie erkennt man sofort, indem man die Bedingung in der Definition in der symmetrischen Form

$$\forall\, x \in X:\; \|x\|_1 \le \frac{1}{c} \cdot \|x\|_2, \quad \|x\|_2 \le d \cdot \|x\|_1$$

schreibt.

**Satz.** *Es sei $X$ ein Vektorraum, und $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ seien zwei zueinander äquivalente Normen auf $X$. Eine Folge $(x_n)$ in $X$ ist konvergent bezüglich der Norm $\|\cdot\|_1$ genau dann, wenn $(x_n)$ konvergent ist bezüglich $\|\cdot\|_2$.*

[4] Also eine reflexive, symmetrische und transitive Relation.

*Beweis.* Es sei $(x_n)$ konvergent gegen $x$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_1$. Dann ist also $\|x_n - x\|_1$ eine Nullfolge (von reellen Zahlen). Wegen der Äquivalenz der beiden Normen gibt es nun ein $c$ mit $\|x_n - x\|_2 \leq c \cdot \_|x_n - x\|_1$. Also ist auch $\|x_n - x\|_2$ eine Nullfolge, d.h. es gilt $\lim x_n = x$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_2$. Die andere zu beweisende Implikation folgt aus Symmetriegründen. □

*Übung.* Sei $X$ ein Vektorraum mit zwei zueinander äquivalente Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$, und seien $d_1$ und $d_2$ die jeweils durch $\|\cdot\|_i$ $(i = 1, 2)$ induzierten Metriken. Zeige: Ein Punkt $a$ ist innerer Punkt von $A$ bezüglich der Metrik $d_1$ genau dann, wenn $a$ innerer Punkt von $A$ bezüglich der Metrik $d_2$ ist. Dito für "Berührungspunkt" statt "innerer Punkt". Zeige $A$ ist offen bezüglich $d_1$ genau dann, wenn $A$ offen bezüglich $d_2$ ist. Dito für "abgeschlossen" statt "offen".

**Satz.** *Im $\mathbb{R}^n$ ist jede Norm äquivalent zur Maximum-Norm.*

*Beweis.* Es bezeichne $\|\cdot\|_\infty$ die Maximum-Norm auf dem $\mathbb{R}^n$ und es sei $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ irgendeine Norm.

Ist $e_1, \ldots, e_n$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^n$, dann gilt für alle $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in \mathbb{R}^n$ die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} N(x) = N(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n) &\leq N(x_1 e_1) + \cdots + N(x_n e_n) \\ &= |x_1| \cdot N(e_1) + \cdots + |x_n| \cdot N(e_n) \\ &\leq \|x\|_\infty \cdot \sum_{i=1}^n N(e_i). \end{aligned}$$

Es bleibt, umgekehrt die Existenz einer Konstanten $c > 0$ mit $\|x\|_\infty \leq c \cdot N(x)$ für alle $x$ zu zeigen. Dazu führen wir die Negation dieser Aussage, d.h. die Annahme, es gibt für alle $c > 0$ ein $x$ mit $\|x\|_\infty > c \cdot N(x)$ zum Widerspruch. Diese Annahme gilt ja insbesondere für $c = 1, 2, 3, \ldots$ Hieraus erhält man eine Folge $(x_k)$ von Vektoren mit $\|x_k\|_\infty > k \cdot N(x_k)$. Wir betrachten nun die Folge $(y_k)$ mit $y_k = x_k / \|x_k\|_\infty$. Für die Glieder dieser Folge gilt $\|y_k\|_\infty = 1$, nach der letzten Ungleichung also $N(y_k) < 1/k$. Damit ist $(y_k)$ bezüglich der Norm $N$ eine Nullfolge. Ferner ist $(y_k)$ bezüglich der Maximum-Norm beschränkt, enthält also nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine (bezüglich der Maximum-Norm) konvergente Teilfolge, etwa $(y_{k_i})_i$ mit $\lim_i \|y_{k_i} - z\|_\infty = 0$ für ein geeignetes $z$. Nun ist mit $(\|y_{k_i} - z\|_\infty)_i$ nach der ganz oben stehenden Abschätzung auch $(N(y_{k_i} - z))_i$ eine Nullfolge. Da auch $N(y_{k_i})$ eine Nullfolge ist, finden wir mit

$$N(z) \leq N(z - y_{k_i}) + N(y_{k_i}),$$

daß $N(z) = 0$, also $z = 0$ gilt. Also ist $(\|y_{k_i} - 0\|_\infty)_i$ eine Nullfolge. Dies ist ein Widerspruch zu $\|y_{k_i}\|_\infty = 1$. □

Der Begriff der "Äquivalenz von Normen ist transitiv (d.h. sind $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_3$ jeweils äquivalent, so sind auch $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_3$ äquivalent). Als wichtige Folgerung des vorstehenden Satzes erhalten wir deshalb sogleich den

**Korollar.** *Alle Normen auf dem $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent.*

Man kann diesen Satz nun sofort noch auf beliebige endlich dimensionale Vektorräume verallgemeinern[5] Wir benötigen dazu einige kleine Vorbereitungen.

Transport von Normen

*Übung.* Seien $X$ und $Y$ Vektorräume (möglicherweise unendlich dimensional), und es gebe einen Vektorraum-Isomorphismus $f : X \mapsto Y$. Zeige:

- Ist $N$ eine Norm auf $Y$, so definiert $f_*N(x) := \|f(x)\|$ eine Norm $f_*N$ auf $X$.
- Sind $N_i$ $(i = 1, 2)$ Normen auf $Y$, so sind sie genau dann äquivalent, wenn $f_*N_i$ $(i = 1, 2)$ äquivalent sind.

**Satz.** *Auf jedem endlich dimensionalen Vektorraum $X$ läßt sich bis auf Äquivalenz eine und nur eine Norm erklären. Jede Norm auf $X$ macht $X$ zu einem Banach-Raum.*

*Beweis.* Für den Nachweis der ersten Behauptung genügt es nach dem letzten Satz und der vorstehenden Überlegung nachzuweisen, daß ein Isomorphismus $f : \mathbb{R}^n \to X$ existiert, wo $n$ die Dimension von $X$ ist. Solch ein Isomorphismus existiert aber nach bekannten Sätzen der linearen Algebra. (Man erhält alle solchen Isomorphismen als Umkehrabbildung der Abbildung, die jedem $y \in Y$ seine Koordinaten bezüglich einer fest gewählten Basis zuordnet.)

Zum Nachweis der zweiten Aussage hat man sich mittels eines Vektorraum-Isomorphismus $g : X \to R^n$ mit Umkehrabbildung $f = g^{-1}$ zu überlegen, daß eine für eine Cauchy-Folge $(x_n)$ in $X$ (bezüglich einer gegebenen Norm $N$ auf $X$), die Folge $(g(x_n))_n$ Cauchy-Folge im $\mathbb{R}^n$ bezüglich der Norm $f_*N$ ist, also gegen ein $z$ konvergiert, und dann auch $x_n$ gegen $f(z)$ konvergiert. Wir lassen die Details als Übungsaufgabe. $\square$

Von der in diesem Satz ausgesprochenen Tatsache werden wir im folgenden gelegentlich stillschweigend Gebrauch machen, indem wir etwa sagen "Die Matrizen in $\mathbb{R}^{n\times n}$ mit Determinante 0 bilden eine abgeschlossenen Menge", oder "Die Teilmenge der invertierbaren Abbildungen in $E := \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$

[5] Das Beispiel am Anfang dieses Abschnitts beruhte also wesentlich darauf, daß $C^0([a, b])$ unendlich dimensional ist.

ist offen in $E$". Dazu ist es nicht nötig irgendeine Norm auf $\mathbb{R}^{n\times n}$ oder $E$ zu explizieren, da solche Normen ja existieren und die Begriffe wie "offen" oder "abgeschlossen" nicht von der speziellen Wahl einer solchen Norm abhängen. Oder wir können in geeigneten Beweisen die Norm auf einem zu betrachtenden endlich-dimensionalen normierten Vektorraum durch eine Beweis-technisch günstigere ersetzen.

## 1.6 Kompakte Mengen

Kompaktheit

**Definition.** Ein metrischer Raum $X$ heißt *kompakt* falls Folgendes gilt: Ist $(U_i)_{i\in I}$ eine Familie offener Mengen von $X$, sodaß $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ gilt, so gibt es schon eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$ mit $X = \bigcup_{j\in J} U_j$.

Man drückt die in der Definition ausgesprochenen Bedingung auch aus, indem man sagt: Jede offene Überdeckung von $X$ mit offenen Mengen besitzt eine endliche Teilüberdeckung.

Eine Teilmenge $A$ eines metrischen Raumes $X$ wird ebenfalls zu einem metrischen Raum, wenn man die Metrik $d$ von $X$ auf $A \times A$ einschränkt.

*Übung.* Man überlege sich: Ein $U \subset A$ ist genau dann offen als Teilmenge des metrischen Raumes $A$, wenn $U$ der Durchschnitt einer in $X$ offenen Menge $V$ mit $A$ ist.

Damit erkennen wir, daß folgende beiden Aussagen äquivalent sind:

- Die Teilmenge $A$ von $X$, aufgefaßt als metrischer Raum bezüglich der Einschränkung der Metrik von $X$, ist kompakt.
- Jede Überdeckung von $A$ mit offenen Mengen von $X$ besitzt eine endliche Teilüberdeckung.

Für endlich dimensionale normierte Vektorräume läßt sich ein wichtiges Kriterium für die Kompaktheit einer Teilmenge $A$ von $X$ angeben. Zur Formulierung und zum Beweis benötigen wir einige Vorbereitungen.

**Definition.** Eine Teilmenge $A$ eines metrischen Raumes $X$ (mit Norm $\|\cdot\|$) heißt *beschränkt*, falls es eine Konstante $M$ gibt, sodaß $\|x\| \leq M$ für alle $x \in A$ gilt.

*Bemerkung.* Ist $X$ endlich dimensional, so sind alle Normen auf $X$ äquivalent. Ist eine Teilmenge $A \subseteq X$ beschränkt bezüglich irgendeiner Norm auf $X$, so ist sie daher auch bezüglich jeder anderen Norm beschränkt, wie man unmittelbar aus dem Begriff der Äquivalenz von Normen folgt. Insbesondere können wir somit z.B. sagen, daß eine Menge des $\mathbb{R}^n$ beschränkt ist, ohne dazu eine bestimmte Norm spezifizieren zu müßen.

Das Hauptergebnis dieses Abschnitts wird die folgende Aussage sein:

Satz von Heine-Borel

**Satz.** *Sei $X$ ein reeller endlich dimensionaler, normierter Vektorraum und $A \subseteq X$. Dann ist $A$ kompakt genau dann, wenn $A$ abgeschloßen und beschränkt ist.*

Nach den Überlegungen des vorangehenden Abschnitts zum Verhalten der topologischen Grundbegriffe unter Vektorraum-Isomorphismen genügt es, beim Beweis des vorstehenden Satzes jeweils nur den $\mathbb{R}^n$ und irgend eine Norm darauf zu betrachten. Wir werden davon stillschweigend Gebrauch machen, falls es bequem ist.

Zunächst beweisen wir:

**Satz.** *Sei $X$ normierter Vektorraum. Ist eine Teilmenge $A \subseteq X$ kompakt, dann ist sie beschränkt und abgeschlossen.*

*Beweis.* Sei $\|\cdot\|$ die Norm auf $X$. Die Mengen $U_\varepsilon(0) = \{x \in X | \, \|x-a\| < \varepsilon\}$ sind für jedes $\varepsilon > 0$ offen. Es gilt $X = \bigcup_{N=1}^{\infty} U_n(0)$. Insbesondere überdecken die $U_n(0)$ die Menge $A$, und da sie kompakt ist, gibt es schon eine endliche Teilüberdeckung. Da $U_m(0) \subseteq U_n(0)$ für $m \leq n$, folgt, daß dann sogar schon $X \subseteq U_{n_0}(0)$ für ein $n_0$ gilt. Also ist $X$ beschränkt.

Um die Abgeschlossenheit von $X$ zu zeigen, beweisen wir, daß das Komplement $X \setminus A$ offen ist. Sei dazu $a \in \mathbb{R}^n - A$. Da $\|x - a\| > 0$ für alle $x \in X$ ist , können wir zu jedem $x \in X$ zwei $\varepsilon$-Umgebungen $U_\varepsilon(x)$ und $U_\varepsilon(a)$ mit geeignetem $\varepsilon = \varepsilon(x) > 0$ finden , sodaß

$$U_\varepsilon(x) \cap U_\varepsilon(a) = \emptyset.$$

(Man kann z.B. $\varepsilon = \|x - a\|/2$ wählen.) Wegen der Kompaktheit wissen wir, daß endlich viele der $U_\varepsilon(x)$ genügen um $X$ zu überdecken. Also ist mit geeignetem $x_i$ $(1 \leq i \leq k)$ und dazugehörigem $\varepsilon_i$ dann

$$A \subseteq U_{\varepsilon_1}(x_1) \cup \cdots \cup U_{\varepsilon_k}(x_k).$$

Weil die $U_{\varepsilon_1}(a), \ldots U_{\varepsilon_k}(a)$ offen sind, ist auch ihre Schnittmenge

$$U := U_{\varepsilon_1}(a) \cap \cdots \cap U_{\varepsilon_k}(a)$$

offen. also eine offene Umgebung von $a$. Sie liegt nun aber im Komplement $X \setminus A$, da

$$(U_{\varepsilon_1}(x_1) \cup \cdots \cup U_{\varepsilon_k}(x_k)) \cap (U_{\varepsilon_1}(a) \cap \cdots \cap U_{\varepsilon_k}(a)) = \emptyset,$$

wie man sich leicht überlegt. ist. Da $a$ beliebig in $X \setminus A$ war, sehen wir nun, daß $X \setminus A$ tatsächlich offen ist. $\square$

Zum Beweis der Umkehrung des vorstehenden Satzes für den Fall eines endlich dimensionalen $X$ müßen wir zunächst einige spezielle Eigenschaften des $\mathbb{R}^n$ aufzeigen, die in allgemeinen metrischen Räumen im Allgemeinen nicht gelten.

Abzählbare Basis eines metrischen Raums

**Definition.** Eine *abzählbare Basis* eines metrischen Raums $X$ ist eine Familie $(B_n)_{n\in N}$ von offenen Mengen, wo $N$ abzählbar ist[6], sodaß jede offene Menge von $X$ Vereinigung von gewissen dieser $U_n$ ist.

*Übung.* Man überlege sich: Besitzt $X$ eine abzählbare Basis, so besitzt auch jede Teilmenge von $X$, als metrischer Raum bezüglich der Einschränkung der Metrik von $X$, eine abzählbare Basis.

**Lemma.** *$\mathbb{R}^n$ hat eine abzählbare Basis.*

*Übung.* Man folgere hieraus, daß dann dann auch jede Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$, aufgefaßt als metrischer Raum, eine abzählbare Basis besitzt.

*Beweis des Satzes.* Als abzählbare Basis kann man die Familie

$$(U_r(q))_{(r,q)\in N}, \qquad N = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^n$$

wählen. Wir lassen es als Übungsaufgabe nachzuweisen, daß $N$ abzählbar ist. □

Abzählbar kompakt

**Definition.** Ein metrischer Raum $X$ heißt *abzählbar kompakt* genau dann, wenn gilt: Jede Überdeckung von $X$ mit abzählbar vielen offenen Mengen besitzt eine endliche Teilüberdeckung.

*Bemerkung.* Offenbar ist jeder kompakte metrische Raum abzählbar kompakt. Man kann jedoch metrische Räume konstruieren, die abzählbar kompakt, aber nicht kompakt sind.

**Satz.** *Der metrische Raum $X$ besitze eine abzählbare Basis. Dann $X$ kompakt genau dann, wenn $X$ abzählbar kompakt ist.*

*Beweis.* Ist $X$ kompakt, so natürlich auch abzählbar kompakt.

Zum Nachweis der Umkehrung sei $(B_n)_{n\in I}$ eine abzählbare Basis von $X$. Wir setzen nun voraus, daß $X$ abzählbar kompakt ist. Sei $X \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$ eine beliebige Überdeckung mit offenen Mengen. Dann ist jedes $U_i$ eine Vereinigung von Mengen der abzählbaren Basis, das heißt

$$U_i = \bigcup_{n\in N_i} B_n,$$

[6] Also eine Bijektion $\mathbb{N} \to N$ existiert.

wo $N_i$ für jedes $i$ eine Teilmenge von $N$ ist. Setzen wir $M := \bigcup_{i\in I} N_i$, so haben wir

$$X = \bigcup_{n\in M} B_n.$$

Dies ist aber eine abzählbare Überdeckung von $X$ mit ofenen Mengen (Wir entleihen hier der elementaren Mengenlehre den Satz: Jede Teilmenge einer abzählbaren Menge ist abzählbar.) Also gibt es schon eine endliche Teilmenge $L \subseteq M$, mit $X = \bigcup_{n\in L} B_n$. Zu $n \in L$ gibt es aber mindestens ein $i_n \in I$ mit $B_n \subseteq U_{i_n}$. es folgt

$$X = \bigcup_{n\in L} U_{i_n},$$

womit wir eine der gewünschten endlichen Teilüberdeckungen der Familie $(U_i)$ gefunden haben. □

Die abzählbare Kompaktheit ist gleichbedeutend mit dem Begriff der Folgenkompaktheit.

**Definition.** Ein metrischer Raum heißt *folgenkompakt*, falls jede Folge in $X$ eine konvergente Teilfolge besitzt.

Folgenkompakt

*Übung.* Sei $(x_n)$ konvergente Folge von Punkten einer abgschlossenen Menge $A$ in einem metrischen Raum $X$. Zeige: Der Grenzwert von $(x_n)$ liegt in $A$.

**Satz.** *Es sei $X$ ein metrischer Raum. Dann ist $X$ abzählbar kompakt genau dann, wenn $X$ folgenkompakt ist.*

*Beweis.* Wir zeigen, daß die folgenden Aussagen paarweise äquivalent sind:

**(1)** $X$ ist abzählbar kompakt.

**(2)** Sind $A_1, A_2, A_3, \dots \subseteq X$ abgeschlossene Mengen mit $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$, dann gibt es schon ein endliches Teilsystem $A_{i_j}$ $(1 \le j \le k)$ mit $\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j} = \emptyset$.

**(3)** Sind $A_1, A_2, A_3, \dots \subseteq X$ abgeschlossene Mengen, sodaß der Durchschnitt jedes endlichen Teilsystems nicht leer ist, dann folgt $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \neq \emptyset$.

**(4)** Ist $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$ eine absteigende Kette von nichtleeren abgeschlossenen Mengen, dann ist ihr Durchschnitt nicht leer, d.h. es gilt $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \neq \emptyset$.

**(5)** $X$ ist folgenkompakt.

(1) $\Leftrightarrow$ (2) folgt durch Dualisieren. (2) $\Leftrightarrow$ (3) folgt durch Kontraponieren. (3) $\Rightarrow$ (4) ist trivial. (4) $\Rightarrow$ (3) folgt durch Betrachten der Kette

$$A_1 \supseteq A_1 \cap A_2 \supseteq A_1 \cap A_2 \cap A_3 \supseteq \ldots .$$

Zum Beweis von (5) $\Rightarrow$ (4) betrachte man eine Folge $(a_i)$ mit $a_i \in A_i$ für alle $i$; eine solche Folge existiert, da ja $A_i \neq \emptyset$. Dann hat $(a_i)$ eine konvergente Teilfolge. Der Limes dieser Teilfolge liegt in jedem $A_i$, da $A_i$ abgeschlossen ist und fast alle Glieder der Teilfolge enthält. Also liegt der Limes in $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

Zum Beweis von (4) $\Rightarrow$ (5) schließlich sei $(a_i)$ eine Folge in $X$. Setze

$$A_n := \{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}.$$

Dann gilt für die abgeschlossenen Hüllen

$$\overline{A_1} \supseteq \overline{A_2} \supseteq \overline{A_3} \supseteq \ldots .$$

Der Durchschnitt dieser Mengen ist nach Voraussetzung (4) nicht leer, enthält also ein Element $a$. Wie man sich leicht überlegt, ist dieses $a$ der Limes einer konvergenten Teilfolge. $\square$

Wir können nun endlich den Beweis des Satzes von Heine-Borel vervollständigen.

*Beweis des Satzes von Heine-Borel.* Wir haben oben schon gesehen, daß eine kompakte Teilmenge stets abgeschlossen und bescränkt ist.

Sei jetzt umgekehrt $A$ eine beschränkte und abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Der $\mathbb{R}^n$, und damit auch die Teilmenge $A$, besitzt eine abzählbare Basis. Es genügt demnach zum Nachweis der Kompaktheit von $A$, zu zeigen, daß $A$ folgenkompakt ist.

Sei also $(a_i)$ eine Folge in $A$. Mit $A$ ist auch die Folge $(a_i)$ beschränkt. Nach einem Satz des letzten Abschnitts besitzt sie somit eine konvergente Teilfolge. Da $A$ abgeschlossen ist, liegt dann aber der Limes dieser Teilfolge in $A$. $\square$

# Kapitel 2

# Stetigkeit

## 2.1 Stetigkeit auf metrischen Räumen

Der Begriff der Stetigkeit von Abbildungen zwischen metrischen Räumen übeträgt sich leicht aus der Analysis I, wen man sich erinnert, daß ja die immer wieder auftretende Bedingung $|x - a| < \epsilon$ für reelle Zahlen in der Sprechweise der metrischen Räume $x \in U_\epsilon(a)$ bedeutet.

Stetige Abbildung

**Definition.** Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen metrische Räume $X, Y$ (mit Metriken $d_1$ bzw. $d_2$) heißt stetig in $a \in X$, falls gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in X : \; d_1(x, y) < \delta \Longrightarrow d_2(f(x), f(a)) < \epsilon.$$

$f$ heißt *stetig* genau dann, wenn $f$ stetig in $a$ ist für alle $a \in X$.

*Bemerkung.* Die angegebene Bedingung für die Stetigkeit in einem Punkt kann man auch folgendermaßen beschreiben:

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \; f(U_\delta(a)) \subseteq U_\epsilon(f(a)).$$

*Übung.* Man prüfe unmittelbar anhand der Definition die Stetigkeit der folgenden Funktionen:

- $\mathrm{add} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \mathrm{add}(x, y) = x \cdot y$,
- $\mathrm{mult} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \mathrm{mult}(x, y) = x \cdot y$,
- $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$, wo $\|\cdot\|$ die Norm eines normierten vektorraums $X$ ist,
- $X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \langle x, y \rangle$, wo $X$ ein euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und $y \in X$ fest gewählt ist.

**Satz.** *Die Abbildung $f : X \to Y$ ist stetig in $a \in X$ dann und nur dann, wenn für jede Folge $(x_n)$ in $X$ mit $\lim x_n = a$ auch $\lim f(x_n) = f(a)$ gilt.*

*Bemerkung.* Stetigkeit in einem Punkt $a$ besagt also, daß die Grenzwertbildung und die Funktionsauswertung vertauscht werden können, in Formeln

$$f(\lim x_n) = \lim f(x_n),$$

falls $(x_n)$ gegen $a$ konvergiert.

*Beweis des Satzes..* Der Beweis dieses Satzes kann völlig analog zum entsprechenden Satz für Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aus der Analysis I geführt werden[1]. □

*Übung.* Mittels des im Satz ausgesprochenen Kriteriums verifitziere man die Stetigkeit der

Projektions- und Inklusions-abbildung

- *i-ten Projektion* $p_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto x_i,$
- der *Inklusion* $\iota : A \to X, x \mapsto x$, wo $A$ eine Teilmenge von $X$ bedeutet.

Das folgende wichtige Kriterium für Stetigkeit benutzt nur den Begriff der offenen Menge und nimmt sonst keinen Bezug auf irgeneine Metrik oder Norm.

Stetigkeit mittels offenen Mengen

**Satz.** *Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist stetig genau dann, wenn für jede offene Teilmenge $V \subseteq Y$ gilt, daß $f^{-1}(V) \subseteq X$ offen in $X$ ist.*

*Beweis.* Es sei $f$ stetig. Sei dann $V \subseteq Y$ offen und $a \in f^{-1}(V)$. Wir haben zu zeigen, daß eine offene Umgebung von $a$ ganz in $f^{-1}(V)$ enthalten ist. Nun ist aber $f(a) \in V$, also $U_\epsilon(f(a)) \subseteq V$ für ein $\epsilon > 0$ (da ja $V$ offen ist), dann aber $f(U_\delta(a)) \subseteq U_\epsilon(f(a))$ für ein $\delta > o$ (da $f$ stetig in $a$ ist), also schließlich $U_\delta(a) \subseteq f^{-1}(V)$.

Wir setzen jetzt voraus, daß offene Mengen in $Y$ offene Urbilder unter $f$ haben. Sei $a \in X$ und $\epsilon > 0$. Dann ist $f^{-1}(U_\epsilon(f(a))$ offen, enhält also eine $\delta$-Umgebung von $a$, und damit ist dann $f(U_\delta(a)) \subseteq U_\epsilon(f(a)$. □

*Beispiel.* Ist $f : X \to Y$ stetig und $A \subseteq X$, so ist auch die Einschränkung $f|_A$ stetig. Ist nämlich $V \subseteq Y$ offen, so ist $(f|_A)^{-1}(V) = A \cap f^{-1}(V)$, also offen in $A$, da ja $f^{-1}(V)$ stetig ist.

Mittels dieses nützlichen Kriteriums erhält man leicht weitere Sätze über stetige Funktion, so zum Beispiel den

[1] Dort diente allerdings das in diesem Satz ausgesprochene Kriterium als Definition der Stetigkeit, und die in der vorstehenden Definition gegebene Bedingung wurde anschließend als äquivalent nachgewiesen.

**Satz.** *Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ stetige Abbildungen, dann ist auch $g \circ f$ stetig.*

*Beweis.* Sei $V \subseteq Z$ offen, dann ist auch $g^{-1}(U) \subseteq Y$ wegen obigen Satzes offen, und damit auch $f^{-1}(g^{-1}(V)) \subseteq X$ offen. Es gilt aber

$$(g \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V)).$$

□

Hiermit kann man oft leicht die Stetigkeit von auf den ersten Blick komplizierten Funktionen nachweisen.

*Beispiel.* Es sei $f : X \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung. Wir können eine solche Abbildung stets in der Form

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

mit geeigneten Abbildungen $f_i : X \to \mathbb{R}$ beschreiben. Ist $f$ stetig, so sind auch alle $f_i$ stetig. In der Tat ist ja $f_i = p_i \circ f$.

*Übung.* Zeige in den vorstehenden Bezeichnungen, daß umgekehrt $f$ stetig ist, falls alle $f_i$ stetig sind.

*Beispiel.* Wir zeigen noch einmal, daß $f|_A$, die Einschränkung auf $A \subseteq X$ einer stetigen Abbildung auf $f$ auf $X$ stetig ist. Dies folgt hier sofort aus $f|_A = f \circ \iota$, und der Stetigkeit der Inklusionsabbildung $\iota : A \to X$.

*Bemerkung.* Im allgemeinen gilt die Umkehrung nicht! Z.B. ist

$$f_a : X \to Y,\ f_a(x) = \begin{cases} 0 \text{ für } x \neq a \\ 1 \text{ für } x = a \end{cases}$$

offenbar unstetig in $a$, wogegen $f|_{\{a\}}$ trivialerweise stetig ist.

Stetigkeit von Polynomen

*Beispiel.* Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ der Gestalt

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{r_1, r_2, \ldots, r_n = 0}^{R} a_{r_1 r_2 \ldots r_n}\, x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_n^{r_n},$$

wo die $a_{r_1 r_2 \ldots r_n}$ fest vorgegebenen reelle Zahlen sind, nenn man polynomiale Abbildung, oder — der Bequemlichkeit halber etwas ungenau — Polynom[2] Ein Polynom ist stetig, wie man sich klarmacht, indem man sich überlegt, daß man ein solches Polynom $f$ stets als Kompositum der stetigen Funktionen $p_i$, add, mult und von konstanten Funktionen schreiben kann. Man überlegt sich dies leicht anhand eines einfachen Beispiels.

[2]Diese subtile Unterscheidung in der Sprechweise wird in der ersten Vorlesung zur Algebra klar werden, spielt hier aber weiter keine Rolle.

## 2.2 Stetigkeit von linearen Abbildungen

Sind $X$ und $Y$ Vektorräume, so bezeichnen wir mit $\mathrm{Hom}(X, Y)$ die Menge (den Vektorraum) aller linearen Abbildungen $f : X \to Y$.

**Lemma.** *Sei $A : X \to Y$ eine lineare Abbildung zwischen normierten Vektorräume. Es sei $X$ sei endlich dimensional. Dann gibt es ein $k \geq 0$, so daß für alle $x \in X$ gilt*

$$\|Ax\| \leq k \cdot \|x\|.$$

*Beweis.* Da $X$ endlich dimensional ist, existiert eine Basis $b_1, \ldots, b_n$ von $X$. Damit läßt sich jedes $x \in X$ in der Form $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i b_i$ mit geeigneten $\xi_i \in \mathbb{R}$ schreiben. Es folgt (wir schreiben $\|\cdot\|$ sowahl für die Norm auf $X$ als auch für die Norm auf $Y$)

$$\begin{aligned} \|Ax\| &= \|A \sum_{i=1}^{n} \xi_i b_i\| \\ &= \|\sum_{i=1}^{n} \xi_i \; Ab_i\| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |\xi_i| \cdot \|Ab_i\| \\ &\leq n \cdot \sup\{|\xi_i|;\; i = 1, \ldots, n\} \cdot \sup\{\|Ab_i\|;\; i = 1, \ldots, n\} \end{aligned}$$

Nun definiert $|x| = \sup\{|\xi_i|;\; i = 1, \ldots, n\},\; x \in X$ eine Norm auf $X$. Da aber $X$ nach Voraussetzung endlich dimensional ist, sind alle Normen auf $X$ äquivalent, insbesondere diese und die gegebene $\|\cdot\|$. Also existiert eine Konstante $c > 0$ mit

$$\sup\{|\xi_i|;\; i = 1, \ldots, n\} \leq c \cdot \|x\|$$

für alle $x$. Damit folgt endlich

$$\|Ax\| \leq k \cdot \|x\|,$$

wobei $k = nc \cdot \sup\{\|Ab_i\|;\; i = 1, \ldots, n\}$ ist. □

*Übung.* Für $A \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ bezeichne man mit $\|A\|$ das "optimale" $k$ wie im Satz, d.h. es sei

$$|A| := \inf\{k > 0 \mid \forall x \in X :\; \|Ax\| \leq k \cdot \|x\|\}.$$

Indem man in der Ungleichung $\|Ax\| \leq k \cdot \|x\|$ für $x \neq 0$ durch $\|x\|$ dividiert, sieht man, daß

$$|A| = \sup \left\{ \|Ax\| \middle| \|x\| = 1 \right\}$$

gilt. Man zeige: Die hierdurch definierte Abbildung $|\cdot| : \mathrm{Hom}(X, Y) \to \mathbb{R}$ definiert eine Norm auf den Vektorraum $\mathrm{Hom}(X, Y)$.

**Satz.** *Es seien $A : X \to Y$ eine lineare Abbildung zwischen normierten Vektorräumen. Es sei $X$ endlich dimensional. Dann ist $A$ stetig.*

*Beweis.* Es seien $a \in X$ und $\epsilon > 0$ gegeben. Es sei weiter $k > 0$ eine Konstante mit $\|Ax\| \leq k \cdot \|x\|$. Setzt man $\delta := \frac{\epsilon}{k}$, so folgt für $\|x - a\| < \delta$ dann

$$\|A(x-a)\| \leq k \cdot \|x - a\| < k \cdot \frac{\epsilon}{k} = \epsilon.$$

□

*Bemerkung.* Sowohl das Lemma als auch der Satz sind für unendlich dimensionale $X$ im allgemeinen falsch.

*Übung.* Zeige die Stetigkeit der Abbildung

$$C^0([0,1]) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int_0^1 f(x)\, dx$$

bezüglich der Supremum-Norm.

## 2.3 Stetigkeit und kompakte Mengen

**Satz.** *Es sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen metrischen Räumen, und es sei $X$ kompakt. Dann ist auch $f(X)$ kompakt.*

*Beweis.* Zum Beweis betrachten wir eine Überdeckung

$$f(X) \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$$

von $X$ mit offenen Mengen $U_i$. Es ist zu zeigen, daß schon endlich viele der $U_j$ den Raum $X$ überdecken. Es ist jedenfalls

$$X = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(U_i),$$

und wegen der Stetigkeit von $f$ ist jedes Urbild $f^{-1}(U_i)$ offen. Wegen der Kompaktheit von $X$ gibt es daher eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$, so daß gilt

$$X = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(U_j).$$

Damit ist dann

$$f(X) \subseteq \bigcup_{j \in J} f(f^{-1}(U_j)).$$

Wegen $f(f^{-1}(U_j)) \subseteq U_j$ folgt endlich

$$f(X) \subseteq \bigcup_{j \in J} U_j.$$

□

Als unmittelbare Folgerung erhalten wir den folgenden wichtigen Existenzsatz:

Existenz von Maxima und Minima

**Satz.** *Sei $X$ kompakter metrischer Raum und $f : X \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung. Dann gibt es $x, y \in X$, sodaß*

$$f(x) = \inf f(X), \quad f(x) = \sup f(X).$$

*Beweis.* Nach dem vorstehenden Satz ist $f(X)$ kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$. Es ist $f(X)$ dann beschränkt, und daher existieren $i := \inf f(X)$ und $s := \sup f(X)$. Aber $i$ und $s$ sind Berührungspunkte von $f(X)$ und $f(X)$ ist abgeschlossen. Also liegen $i$ und $s$ in $X$, wie behauptet. □

*Bemerkung.* Mit dem Satz von Heine-Borel können wir den vorstehenden Satz auch folgendermaßen aussprechen: Ist $A \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt und abgeschloßen, so nimmt jede stetige Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ ein Minimum und ein Maximum an. In der Analysis 1 hatten wir dies schon für Intervalle $A = [a, b]$ eingesehen.

Wir beenden dieses Kapitel mit einem Beispiel einer kompakte Menge. Wir bemerken dazu zunächst, daß eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen metrischen Räumen genau dann stetig ist, falls $f^{-1}(A)$ für jede in $Y$ abgeschloßene Menge $A$ in $X$ abgeschloßen ist. Dies folg leicht durch Dualisieren der Aussage, daß $f$ genau dann stetig ist, wenn offene Mengen in $Y$ offene Urbilder unter $f$ in $X$ haben.

Einheitssphäre $S^{n-1}$

*Beispiel.* Für $n \geq 1$ definiert man die $n-1$-dimensionale Einheitssphäre des $\mathbb{R}^n$ als die Menge

$$S^{n-1} := \{x = (x_1, \ldots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\}.$$

Offenbar ist $S^{n-1}$ beschränkt (ist $\| \cdot \|$ die euklidische Norm auf dem $\mathbb{R}^n$, so ist ja $S^{n-1}$ gerade die Menge aller $x$ mit $\|x\| \leq 1$.) Die Einheitssphäre ist aber auch abgeschlossen. Es ist nämlich $S^{n-1} = f^{-1}([0, 1])$, wo $f(x) = \|x\|$ ist, und $f$ ist stetig und $[0, 1]$ abgeschlossen.

# Kapitel 3

# Differenzierbarkeit

Im folgenden setzen wir stets, soweit nichts anderes gesagt wird, voraus, daß alle betrachteten Vektorräume reell und *endlich dimensional* sind. Insbesondere können wir jeden solchen Vektorraum $X$ normieren: wir benutzen das Symbol $\|\cdot\|$ für eine Norm auf $X$, und wir werden selten mehr über die Norm voraussetzen müssen als die Norm-Axiome.

Das Ziel dieses Kapitels ist die Einführung des Begriffs der Ableitung einer Funktion $f : X \to Y$ zwischen Vektorräumen (wobei statt $X$ allgemeiner auch Teilmengen als Definitionsbereich in Frage kommen werden). Um zu einem solchen Begriff zu kommen, gibt es verschiedene sinnvolle Gesichtspunkte, die aber letztendlich alle auf die gleiche Definition hinauslaufen. Wir werden in den folgenden Abschnitten bei passender Gelegenheit jeweils darauf zurück kommen. Zunächst haben wir allerdings den Begriffs des Grenzwertes aus der Analysis I für Funktionen auf Vektorräumen und mit Werten in Vektorräumen zu verallgemeinern.

## 3.1 Der Grenzwert von Abbildungen

Oben haben wir bereits den Grenzwert von Punktfolgen in einem Vektorraum $X$ betrachtet. Wir wollen nun die Formulierung des Grenzwertes $\lim_{x\to a} f(x)$ für auf Teilmengen von $X$ definierte Funktionen $f$ angeben.

**Definition.** Es seien $X, Y$ normierte Vektorräume und $U$ eine Teilmenge von $X$. Ein Punkt $a$ von $X$ heißt *Häufungspunkt von $U$*, falls $a$ ein Berührungspunkt von $U \setminus \{a\}$ ist.

Häufungspunkt

*Bemerkung.* Es ist also $a$ ein Häufungspunkt von $U$, falls jede (offene) Umgebung $V$ von $a$ mindestens einen von $a$ verschiedenen Punkt enthält.

*Übung.* Man zeige: $a$ ist Häufungspunkt von $U$ genau dann, wenn jede Umgebung von $a$ unendlich viele Punkte von $U$ enthält (d.h. eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sodaß alle $a_n \in U$ und die $a_n$ paarweise verschieden sind).

Grenzwert einer Funktion

**Definition.** Seien $X$, $Y$ normierte Vektorräume, $U \subseteq X$, sei $f : U \to Y$ eine Abbildung und $a$ ein Häufungspunkt von $U$. Dann sagen wir $f(x)$ *strebt gegen den Grenzwert $b \in Y$ für $x$ gegen $a$ mit $x \in U$*, in Symbolen

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in U}} f(x) = b,$$

falls gilt

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in U : \|x - a\| < \delta \Longleftrightarrow \|\phi(x) - a\| < \epsilon.$$

*Bemerkung.* Man überlegt sich leicht, daß der Grenzwert $a$ in obiger Definition eindeutig bestimmt ist (falls er existiert); hierzu benötigt man die Voraussetzung, daß $a$ ein Häufungspunkt von $U$ ist.

Man überlegt sich ferner, daß die in der Definition aufgeführte Bedingung für die Existenz des Grenzwertes nicht von der speziellen Wahl der Normen auf $X$ und $Y$ abhängen (da ja alle Normen auf endlich dimensionalen Vektorräumen äquivalent sind).

*Übung.* Man zeige, daß die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in U}} f(x) = b.$
2. Für jede Punktfolge $(x_n)$ in $A$ mit Grenzwert $a$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b.$

## 3.2 Die Richtungsableitung

Die naheliegendste Idee, eine Ableitung einzuführen, um dann die Sätze der Analysis I auf Funktionen in mehreren Veränderlichen zu übertragen, führt zum Begriff der *Richtungsableitung*. Man gibt sich mittels eines Vektors eine Richtung vor, diese definiert zu einem gegebenen Punkt genau eine Gerade durch diesen Punkt; man schränkt eine gegebene Funktion auf diese Gerade ein, identifiziert die Gerade mit der reellen Achse und bildet dann die gewöhnliche Ableitung. Wir kommen nun zur formalen Definition.

Seien $X$, $Y$ Vektorräume, sei $U$ eine offene Teilmenge des Vektorraums $X$, und sei $f : U \to Y$ eine Abbildung.

Richtungsableitung

**Definition.** Sei $v \in X$ und $a \in U$. Unter der *Richtungsableitung von $f$ im Punkt $a$ in Richtung $v$* versteht man den Grenzwert

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a + t\,v) - f(a)}{t},$$

falls dieser existiert. Er wird mit $D_v f(a)$ bezeichnet.

*Bemerkung.* Statt $D_v f(a)$ findet man in der Literatur gelegentlich auch die Bezeichnung

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a).$$

Wir habe hier vorausgesetzt, daß $U$ offen ist, damit jeder Punkt $a \in U$ innerer Punkt von $U$ ist, wonach also die Abbildung einer reellen Variablen $t \mapsto f(a + t\,v)$ auf einer offenen Umgebung von $t = 0$ definiert ist. Insbesondere ist also der Limes, sofern er existiert, eindeutig.

Existiert die Richtungsableitung in Richtung $v$ für jedes $a \in U$, so erhalten wir damit eine neue Funktion

$$D_v f : U \to Y, \quad a \mapsto D_v f(a).$$

Ein wichtiger Spezialfall der Richtungsableitung ist die *partielle Ableitung*. Wie üblich bezeichnen wir mit $e_1, \ldots, e_n$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^n$. Es ist also $e_j$ derjenige Spaltenvektor der Länge $n$, dessen Komponenten alle gleich 0 sind, abgesehen von der $j$-ten, die eine 1 enthält.

Partielle Ableitung

**Definition.** Sei $U$ offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Die Richtungsableitung einer auf $U$ definierten Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$ in Richtung des Vektors $e_j$ und in einem Punkt $a \in U$ wird als *$j$-te partielle Ableitung* von $f$ bei $a$ bezeichnet, in Zeichen

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = D_{e_j} f(a) = \lim_{t \to a_j} \frac{f(a_1, \ldots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \ldots, a_n) - f(a)}{t}.$$

Hier bezeichnen die $a_i$ die Komponenten von $a$.

*Bemerkung.* Die $j$-te partielle Ableitung einer Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$ erhält man also einfach, indem man alle Argumente $x_i$ jeweils durch $a_i$ ersetzt, abgesehen von dem $j$-ten, und dann die resultierenden Funktion in der einen Variablen $x_j$ bei $a_j$ nach den Regeln aus der Analysis I zu differenzieren versucht.

*Beispiel.* Wir betrachten die Funktion

$$f(x, y, z) = x^3 y + xyz + z^2$$

(also etwa $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$). Man erhält die 2-te partielle Ableitung (man sagt naheliegenderweise auch *partielle Ableitung nach $y$*), indem man $x$ und $z$ als Konstante ansieht und die resultierende Funktion (von $y$) nach $y$ differenziert, also

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + xz.$$

Ganz ähnlich findet man

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 y + yz,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} \;=\; xy + 2z.$$

So konzeptionell einfach der Begriff der Richtungsableitung ist, so wenig hilfreich ist er ohne eine tiefergehende Theorie und ohne weitere Voraussetzungen an die in Frage stehende Funktion $f$. So gibt es a priori unendlich viele Richtungsableitungen von $f$ in ein ein demselben Punkt und scheinbar keinen Zusammenhang zwischen diesen. In der Tat kann man z.B. Funktionen konstruieren, die in der einen Richtung sehr wohl differenzierbar, in anderen es aber nicht sind. Wir werden allerdings gleich sehen, daß eine wichtige Klasse von Funktionen die Eigenschaft hat, daß ihre Richtungsableitungen in einem gegebenen Punkt $a$ in alle Richtungen existieren, und sodaß die Abbildung

$$X \to Y, \quad x \mapsto D_x f(a)$$

sogar linear ist !

## 3.3 Totale Differenzierbarkeit

Ist $f : U \to \mathbb{R}$ eine Funktion von einer Variablen (also $U \subseteq \mathbb{R}$), so hat die Ableitung $f'(a)$ die Bedeutung, daß die lineare Funktion

$$\ell(t) := f(a) + f'(a)t$$

die Funktion $f$ im Punkte $a$ am besten approximiert. Dabei heißt *am besten*, daß für $r(t) = f(t) - \ell(t)$ die Grenzwertbedingung $\lim_{t\to a} r(t)/|t-a| = 0$ erfüllt ist. Ist nun $f$ eine Funktion von $n$ Veränderlichen (d.h. ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$), so liegt die folgende Verallgemeinerung auf der Hand: Gesucht ist ein lineares Polynom, d.h ein Polynom von der Gestalt

$$\ell(x_1, \ldots, x_n) = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n,$$

sodaß für $r(x) := f(x) - \ell(x)$ die Bedingung $\lim_{x\to a} r(x)/\|x-a\| = 0$ erfüllt ist. Hierbei ist $\|\cdot\|$ irgendeine Norm auf $X$. Die vorstehende Limes-Bedingung hängt nicht von der speziellen Wahl der Norm ab (da ja alle Normen auf endlich dimensionalen Vektorräumen äquivalent sind).

Man kann diese Idee noch etwas anders formulieren, und erhält dann noch eine abstraktere Version des Begriffs der Differenzierbarkeit. Im Fall einer Variablen ist $f(a)+tf'(a)$ eine *Gerade*: die optimale Approximation des Graphen von $f$ bei $(a, f(a))^t \in \mathbb{R}^2$ durch Geraden. Ist $f$ allgemein eine Funktion $f : U \to Y$ und $U \subseteq X$ offen, wobei $X$ und $Y$ (abstrakte) Vektorräume sind, so ist der Graph von $f$ definiert als die Menge

$$G_f := \{(x, f(x)) : x \in U\} \subseteq X \times Y.$$

Eine Hyperebene$H$ in einem Vektorraum $Z$ ist eine Teilmenge der Gestalt

$$Z = b + L,$$

wo $L$ ein Untervektorraum von $Z$ der Kodimension 1 ist (dabei bedeutet $b + L$ die Menge aller Punkte $b + l$ in $Z$, wo $l$ den Untervektorraum $L$ durchläuft). Spezielle Hyperebenen in $X \times Y$ erhält man als Graphen von affinen Abbildungen. Eine *affine Abbildung* $\ell : X \to Y$ ist eine Abbildung der Gestalt

Hyperebene
Affine
Abbildung

$$\ell(x) = b + A(x),$$

wo $A : X \to Y$ linear und $b$ ein fest vorgegebene Punkt in $Y$ ist. Ist $X = \mathbb{R}^n$ und $Y = \mathbb{R}$, so ist also eine affine Abbildung nichts anderes als ein lineares Polynom. Zu gegebenem $f : U \to Y$ und $a \in U$ suchen wir demnach eine affine Abbildung $\ell$, sodaß die Hyperebene

$$G_\ell = \{(x, y) \in X \times Y : y = \ell(x)\}$$

sich optimal an den Graphen $G_f$ bei $(a, f(a))$ anschmiegt, genauer, sodaß $r(x) := f(x) - \ell(x)$ die Eigenschaft $\lim_{x\to a} r(x)/\|x - a\| = 0$ erfüllt. Für das $b$ in der Beschreibung einer $f$ approximierenden affinen Abbildung $\ell$ haben wir gar keine Wahl, es ist in jedem Fall $\ell(x) = f(a)+A(x-a)$ mit geeignetem linearen $A$ (damit nämlich $\ell(a) = f(a)$ ist), oder also auch

$$\ell(a + h) = f(a) + A(h)$$

für $h \in X$. Der wesentliche Punkt ist also die zugeordnete lineare Abbildung $A$. Wir kommen damit endlich zu der folgenden Definition.

Totale Differenzierbarkeit

**Definition.** Es seien $X, Y$ endlich dimensionale Vektorräume, $U \subseteq X$ offen und $f : U \to Y$. Dann heißt $f$ *differenzierbar* in $a \in U$, falls es eine lineare Abbildung $A \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ gibt, sodaß gilt:

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ a+h\in U, h\neq 0}} \frac{f(a + h) - f(a) - A(h)}{\|h\|} = 0.$$

Die lineare Abbildung $A$ heißt Ableitung von $f$ bei $a$ und wird mit

$$Df(a)$$

bezeichnet.

*Bemerkung.* Setzen wir $R(h) := f(a+h) - f(a) - Ah$, so ist $f$ also differenzierbar in $a$ mit Ableitung $A$ genau dann, wenn gilt:

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{\|R(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Insbesondere folgt hieraus, daß $R(h)$ stetig in $h = 0$ ist.

*Bemerkung.* In der Literatur wird die lineare Abbildung $A$ auch als *totale Ableitung* von $f$ bezeichnet, um den Unterschied zur Richtungsableitung oder partiellen Ableitung herauszuheben. Manchmal findet man auch die Bezeichnung $f'(a)$ für $Df(a)$. Wir ziehen aber eine konsistente Bezeichnungsweise vor und bleiben bei $Df(a)$.

*Bemerkung.* Für $X = Y = \mathbb{R}$ ist $A = Df(a)$ eine lineare Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sie ist also von der Gestalt $Df(a)(t) = \lambda \cdot t$ mit einer geeigneten Konstanten $\lambda$. Aus der Limesbedingung folgt, daß genauer

$$Df(a)(t) = f'(a)\, t$$

gilt.

**Satz.** *Sei $f : U \to Y$ in $a \in U$ differenzierbar mit Ableitung $A$. Dann ist $A$ durch $f$ und $a$ eindeutig bestimmt (und damit die Bezeichnungsweise $Df(a)$ für $A$ gerechtfertigt).*

*Bemerkung.* Ist $f$ in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs $U$ differenzierbar, so erhalten wir eine Abbildung

$$D : U \to \mathrm{Hom}(X, Y).$$

Ableitung einer Funktion

Diese wird als Ableitung von $f$ bezeichnet. Sie ist offenbar wieder eine Abbildung zwischen endlich dimensionalen Vektorräumen (und wir können z.B. versuchen, nochmals zu differenzieren); man beachte aber, daß der Bildraum der Ableitung nicht mehr $Y$ ist !

*Beweis des Satzes.* Es sei $f$ bei $a$ differenzierbar mit Ableitungen $A$ und $B$. Zu zeigen ist $A = B$. Dazu setzen wir $d(h) := f(a+h) - f(a)$ und haben dann

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{\|Ah - Bh\|}{\|h\|} &= \lim_{h\to 0} \frac{\|Ah - d(h) + d(h) - Bh\|}{\|h\|} \\ &\leq \lim_{h\to 0} \frac{\|Ah - d(h)\|}{\|h\|} + \lim_{h\to 0} \frac{\|d(h) - Bh\|}{\|h\|} = 0. \end{aligned}$$

Für $x \in X$ geht offenbar $tx$ gegen 0 für $t$ gegen 0. Wir können also $h = tx$ setzen, und dann $t$ gegen 0 gehen lassen:

$$0 = \lim_{t\to 0} \frac{\|A(tx) - B(tx)\|}{\|tx\|} = \frac{\|Ax - Bx\|}{\|x\|}.$$

Also ist $\|Ax - Bx\| = 0$, d.h. $Ax - Bx = 0$, d.h. $Ax = Bx$ und dies für beliebiges $x$. Also ist tatsächlich $A = B$. $\square$

*Beispiel.* Eine affine Abbildung $F : X \to Y$, $f(x) = b + A(x)$ (wo also $b \in Y$ und $A \in \operatorname{Hom}(X, Y)$) ist in jeder Stelle $a$ des Definitionsbereichs differenzierbar. Für die Ableitung gilt

$$Df(a) = A.$$

In der Tat ist ja hier sogar

$$\frac{f(a+h) - f(a) - A(h)}{\|h\|} = \frac{A(a+h) - A(a) - f(h)}{\|h\|} = 0,$$

wobei wir die Linearität von $f$ ausgenutzt haben.

*Übung.* Es bezeichne $\mathcal{P}_n$ den Vektorraum aller Polynome in einer reellen Variablen vom Grade $\leq n$. Man bestimme die Ableitung der Abbildung

$$\operatorname{eval} : \mathcal{P}_n \to \mathbb{R}, \quad \operatorname{eval}(p) = p(0).$$

**Satz.** *Ist $f : U \to Y$ differenzierbar in $a$, so ist $f$ auch stetig in $a$.*

*Beweis.* Wir betrachten $R(h)$ mit $f(a+h) = f(a)+A(h)+R(h)$. Da die affine Abbildung $h \mapsto f(a) + A(h)$ und die Abbildung $R(h)$ stetig in $h = 0$ sind (vgl. die Bemerkung im Anschluß an die Definition der Differenzierbarkeit), ist auch die Abbildung $h \mapsto f(a + h)$ stetig in $h = 0$, und somit ist $f(x)$ stetig bei $x = a$. □

Wichtig ist die folgende Interpretation der linearen Abbildung $Df(a)$, die den Zusammenhang zwischen den Begriffen *totaler Differenzierbarkeit* und *Richtungsableitung* herstellt.

**Satz.** *Sei $U \subseteq X$ offen und $f : U \to Y$ differenzierbar bei $a$. Dann existiert für jedes $v \in X$ die Richtungsableitung $D_v f(a)$. Es gilt*

$$Df_v(a) = Df(a)(v).$$

*Beweis.* Wir betrachten

$$R(h) = \frac{f(a+h) - f(a) - Df(a)(h)}{\|h\|}.$$

Für $h$ geht auch $R(h)$ gegen 0. Setzen wir nun $h = tv$, so geht auch mit $t$ auch $h$ gegen 0, und so

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + t\,v) - f(a) - Df(a)(t\,v)}{\|t\ v\|} = 0.$$

Mit $Df(a)(t\,v) = t\,Df(a)(v)$ folgt nun sofort unsere Behauptung. □

Als Folgerung aus dem vorhergehenden Satz können wir die totale Ableitung einer Funktion $f : U \to \mathbb{R}^n$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^m$ explizit beschreiben. Wir bemerken zunächst, daß eine Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^n$ $(U \subseteq X)$ offenbar durch $n$ reellwertige Funktionen $f_i : U \to \mathbb{R}$ $(1 \leq i \leq n)$ gegeben ist:

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}.$$

Man schreibt hierfür auch einfach

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}.$$

Komponentenfunktion

Die Funktion $f_i$ heißt *$i$-te Komponentenfunktion von $f$*. Offenbar gilt $f_i = p_i \circ f$, wo $p_i$ die $i$-te *Projektion*

$$p_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto x_i$$

bezeichnet. Da $p_i$ linear ist, ist für jede lineare Abbildung $A \in \mathrm{Hom}(X, \mathbb{R})$ die $i$-te Komponentenfunktion $A_i$ linear. Da $p_i$ stetig ist, ist auch $f_i$ stetig, wenn $f$ stetig ist, und wir werden gleich sehen daß letzteres auch für die Differenzierbarkeit an Stelle der Stetigkeit gilt.

*Übung.* Man zeige: sind alle $f_i$ stetig in $a$, so ist auch $f$ stetig in $a$.

*Übung.* Man zeige, daß die Projektionen $p_i$ differenzierbar sind und berechne ihre Ableitungen.

Jacobi-Matrix

**Definition.** Sei $f : U \to \mathbb{R}^n$ $(U \in \mathbb{R}^m$ offen) differenzierbar in $a$. Die Matrix $\mathcal{J}_f(a)$, sodaß für alle $x \in \mathbb{R}^m$ gilt

$$Df(a)(x) = \mathcal{J}_f(a) \cdot x$$

heißt *Jacobi-Matrix* von $f$ in $a$. (Der Punkt steht hier für die gewöhnliche Matrizen-Multiplikation.),

**Satz.** *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $f = (f_1, \ldots, f_n)^t : U \to \mathbb{R}^n$ in $a$ differenzierbar. Dann sind auch die Komponentenfunktionen $f_i$ (1 $\leq i \leq n$ differenzierbar, und es gilt*

$$\mathcal{J}_f(a) = \begin{pmatrix} D_{e_1}f_1(a) & D_{e_2}f_1(a) & \cdots & D_{e_m}f_1(a) \\ D_{e_1}f_2(a) & D_{e_2}f_2(a) & \cdots & D_{e_m}f_2(a) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_{e_1}f_n(a) & D_{e_2}f_1(a) & \cdots & D_{e_m}f_n(a) \end{pmatrix}$$

*Beweis.* Aus der Stetigkeit und Linearität der Projektionsabbildungen $p_i$ folgt

$$\begin{aligned} 0 = p_i(0) &= p_i\left(\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-Df(a)(h)}{\|h\|}\right) \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{p_i(f(a+h)-f(a)-Df(a)(h))}{\|h\|} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f_i(a+h)-f_i(a)-p_i(Df(a)(h))}{\|h\|}. \end{aligned}$$

Dies beweist, daß jedes $f_i$ in $a$ differenzierbar ist, und zwar mit Ableitung

$$Df_i(a) = p_i \circ Df(a).$$

Schreiben wir $x = (x_1, \ldots, x_m)^t \in \mathbb{R}^m$ in der Form $x = \sum_{j=1}^m x_j e_j$, so haben wir

$$Df(a)(x) = \sum_{j=1}^n Df(a)(e_j)\, x_j,$$

und mit

$$p_i(Df(a)(e_j)) = Df_i(a)(e_j) = D_{e_j} f_i(a)$$

und der Linearität von $p_i$ daher

$$p_i(Df(a)(x)) = \sum_{j=1}^n D_{e_j} f_i(a)\, x_j.$$

Das ist die behauptete Formel. □

*Beispiel.* Für eine Abbildung $f : U \to \mathbb{R}$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^m$, die in $a$ differenzierbar ist, haben wir also

$$Df(a)(h, \ldots, h_m) = \frac{\partial f}{x_1}(a)\, h_1 + \cdots + \frac{\partial f}{x_m}(a)\, h_m,$$

und somit

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-\sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_m}(a)\, h_m}{\|h\|} = 0.$$

Hier ist $h(h_1, \ldots, h_m)^t$ und $\|\cdot\|$ irgendeine Norm auf dem $\mathbb{R}^m$ (z.B. die euklidische). In dieser Schreibweise erkennen wir nun explizit das $f$ approximierende lineare Polynom.

Wir führen an dieser eine der bekanntesten Anwendungen der Differentialrechnung in mehreren Veränderlichen an.

**Definition.** Sei $f : A \to \mathbb{R}$ eine auf einer Teilmenge $A$ eines Vektorraums $X$ definierte Funktion. Wir sagen, daß $f$ bei $a$ ein *lokales Maximum* besitzt, wenn eine offenen Umgebung $V \subset X$ existiert, sodaß gilt:

$$\forall x \in V \cap A : f(a) \geq f(x).$$

Lokaler Extremwert

Gilt in der letzten Ungleichung $>$, $\leq$ oder $<$, so nennen wir $a$ eine *striktes lokales Maximum* bzw. *lokales Minimum* bzw. *striktes lokales Minimum*.

**Satz.** *Sei $U \subseteq X$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Besitzt $f$ bei $a$ ein lokales Maximum oder Minimum, so ist $Df(a) \equiv 0$.*

*Beweis.* Es hat ja dann $\phi(t) := f(a + t\,v)$ für jeden Vektor $v \in X$ einen lokalen Extremwert bei $t = 0$. Nach dem bekannten Satz aus der Analysis I ist daher $\phi'(0) = 0$. Es ist aber $\phi'(0) = D_v f(a) = Df(a)(v)$. Also ist in der Tat $Df(a)(v) = 0$ für jedes $v \in X$. □

Im Fall $X = \mathbb{R}^m$ liegt also bei $a$ höchstens dann ein lokaler Extremwert vor, wenn

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = 0, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) = 0.$$

Dies sind gerade $m$ Gleichungen für die $m$ unbekannten Komponenten von $a$. Ist $f$ hinreichend *vernünftig*, so wir man also höchstens endlich viele Lösungen $a$ erwarten.

*Beispiel.* Ist $f$ eine *quadratische Form*, d.h $f(x, y) = px^2 + qxy + ry^2$ mit Konstanten $p, q, r$, so ist

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 2pa + qb, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = qa + 2rb.$$

Es liegt also höchstens dann bei $(a, b)^t$ ein lokaler Extremwert vor, wenn

$$\begin{pmatrix} 2r & q \\ q & 2r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0.$$

Ist die Diskriminante $q^2 - 4pr \neq 0$, so ist nur 0 ein lokaler Extremwert von $f$. (Ist dies dann aber auch tatsächlich ein Extremwert ?)

## 3.4 Stetige Differenzierbarkeit

Nach den Ergebnissen des letzten Abschnitts können wir Ableitungen berechnen, indem wir etwa Jacoi-Matrizen ausrechnen. Wir haben aber kein einfaches Kriterium, um an der Jacobi-Matrix abzulesen, ob nun die in Frage kommende Funktion wirklich total differenzierbar ist. Das direkte Nachprüfen anhand der Definition der Differenzierbarkeit ist im Allgemeinen nicht leicht. Wir geben in diesem Abschnitt ein einfaches Kriterium.

**Definition.** Essei $U \subseteq X$ offen und $f : U \to Y$ eine Abbildung. Dann heißt *$f$ von der Klasse $C^1$*, falls

1. $Df(a)$ für alle $a \in X$ existiert und

2. die dadurch erklärte Abbildung $Df : U \to \mathrm{Hom}(X, Y)$, $x \mapsto Df(x)$ stetig ist. Die Menge aller solchen Abbildungen wird mit $\mathcal{C}^1(U, Y)$ bezeichnet.

Stetig differenzierbar

*Bemerkung.* Offenbar ist $\mathcal{C}^1(U, Y)$ ein Untervektorraum im Vektorraum aller Funktionen $f : U \to Y$.

**Satz.** *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$. Für jedes $1 \leq i \leq n$ sei $f$ stetig partiell nach $e_i$ differenzierbar, d.h. die partielle Ableitung $D_{e_i} f : U \to \mathbb{R}$ existiert und ist stetig. Dann ist $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$.*

*Beweis.* Es sei $a = (a_1, \ldots, a_n)^t \in U$ und $h = (h_1, \ldots h_n)^t \in \mathbb{R}^n$, sodaß noch $a + h \in U$ gilt. Die Differenz $f(a + h) - f(a)$ läßt sich dann wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned}
f(a+h) - f(a) &= f(a_1 + h_1, \ldots, a_n + h_n) - f(a_1, \ldots, a_n) \\
&= f(a_1 + h_1, \ldots, a_n + h_n) \\
&\qquad - f(a_1 + h_1, \ldots, a_{n-1} + h_{n-1}, a_n) \\
&\quad + f(a_1 + h_1, \ldots, a_{n-1} + h_{n-1}, a_n) \\
&\qquad - f(a_1 + h_1, \ldots, a_{n-2} + h_{n-2}, a_{n-1}, a_n) \\
&\quad \ldots \\
&\quad + f(a_1 + h_1, a_2, \ldots, a_n) \\
&\qquad - f(a_1, \ldots, a_n)
\end{aligned}$$

Die einzelnen rechts stehenden Differenzen fassen wir bei festgehaltenen übrigen Argumenten als Funktionen des $i$-ten Arguments auf. Wir können auf sie den uns bekannten Mittelwertsatz anwenden Es existieren also Zwischenstellen $c^{(i)} \in \mathbb{R}^n$,

$$c^{(i)} = (a_1 + h_1, \cdots, a_{i-1} + h_{i-1}, c_i^{(i)}, a_{i+1}, \cdots, a_n)^t,$$

mit $c_i^{(i)} \in (a_i, a_i + h_i)$, so daß gilt

$$\begin{aligned}
&f(a_1 + h_1, \ldots, a_i + h_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) \\
&- f(a_1 + h_1, \ldots, a_{i-1} + h_{i-1}, a_i, \ldots, a_n) \\
&\qquad = \frac{\partial f}{\partial x_i}(c^{(i)}) \cdot h_i.
\end{aligned}$$

Damit haben wir dann

$$f(a+h) - f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(c^{(1)}) \cdot h_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(c^{(n)}) \cdot h_n.$$

Dies schreiben wir um zu

$$f(a+h) - f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \cdot h_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \cdot h_n + R(h)$$

mit

$$R(h) = \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i}(c^{(i)}) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right) h_i.$$

Nach Dreiecksungleichung und mit $|h_i| \leq \|h\|$ für alle $i$ können wir abschätzen

$$|R(h)| \leq \|h\| \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(c^{(i)}) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right|.$$

Es ist aber $\|c^{(i)} - a\| \leq \|h\|$, d.h. $c^{(i)}$ strebt gegen $a$ für $h \to 0$. Wegen der Stetigkeit der partiellen Ableitungen ist daher $\lim_{h \to 0} |R(h)|/\|h\| = 0$. Also ist $f$ in $a$ differenzierbar. □

*Bemerkung.* Es gibt Funktionen $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, die überall partiell differenzierbar sind, allerdings nicht total differenzierbar (vgl. die Übungsaufgaben). Die Voraussetzung der *stetigen* Differenzierbarkeit im vorangehenden Satz ist also nicht überflüssig.

*Beispiel.* Die partielle Ableitung eines Polynoms ist stets erklärt und wieder ein Polynom, insbesondere also stetig. Daher sind Polynome stetig differenzierbar.

Oben haben wir schon gesehen, daß eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, \ldots, f_n)^t$ differenzierbar ist genau dann, wenn die Komponentenfuntionen $f_i$ es sind. Dies, zusammen mit dem vorstehenden Satz gibt ein allgemeines und einfach anzuwendendes Kriterium für die totale Differenzierbarkeit von Abbildungen $f : U \to \mathbb{R}^n$ mit $U \subset \mathbb{R}^m$.

## 3.5 Die Kettenregel

Zum Berechnen der Ableitung einer Funktion als auch zum Nachweis ihrer Existenz benötigt man einige Regeln. Eine haben wir im letzten Abschnitt gesehen, wo totale Differenzierbarkeit auf partielle Differenzierbarkeit zurückgeführt wurde. Dann gibt es einige offensichtliche Regeln, auf die wir hier gar nicht weiter eingehen (sie aber sehr wohl benutzen werden), wie etwa die, daß $f \mapsto Df(a)$ linear in $f$ ist, oder auch eine Regel für das Produkt $D(fg)$ von zwei reellwertigen Funktionen $f$ und $g$. (Wie lautet sie ?)

Eine nicht ganz so offensichtliche, aber dennoch wichtige Regel besprechen wir in diesem Abschnitt.

Kettenregel

**Satz.** *Seien $X$, $Y$ und $Z$ endlich dimensionale Vektorräume, $U \subseteq X$ und $V \subseteq Y$ offene Teilmengen. Sei $g : U \to Y$ eine in $a$ und $f : V \to Z$ eine in $g(a)$ differenzierbare Funktion, wobei $g(U) \subseteq V$ gelte. Dann ist auch $f \circ g : U \to Z$ differenzierbar in $a$ und es gilt*

$$D(f \circ g)(a) = Df(g(a)) \circ Dg(a).$$

*Beweis.* Wir schreiben

$$g(x) - g(a) = Dg(a)(x-a) + r(x)\|x-a\|$$

mit einer für $x \neq a$, $x \in U$ erklärten Funktion $r(x)$. Die Differenzierbarkeit von g in $a$ besagt $\lim_{x\to a} r(x) = 0$. Ebenso haben wir

$$f(y) = f(g(a)) + Df(g(a))[y - g(a)] + s(y)\|y - g(a)\|$$

mit einer geeigneten auf $V \setminus \{g(a)\}$ erklärten Funktion $s(y)$, und es gilt $\lim_{y\to g(a)} s(y) = 0$. Wir ersetzen nun in der letzten Identität $y$ durch $g(x)$ und $y - g(a)$ durch die die rechte Seite der Identität für $g(x) - g(a)$:

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(a)) + Df(g(a))[Dg(a)(x-a) + r(x)\|x-a\|] \\ &\quad + s(g(x))\big|Dg(a)(x-a) + r(x)\|x-a\|\big| \\ &= f(g(a)) + (Df(g(a)) \circ Dg(a))(x-a) + t(x), \end{aligned}$$

wobei

$$t(x) = Df(g(a))\,(r(x)\|x-a\|) + s(g(x))\,\|Dg(a)(x-a) + r(x)\|x-a\|\|\,.$$

Wir haben zu zeigen, daß $\lim_{x\to a} t(x)/\|x-a\| = 0$. Dazu schätzen wir mittels der Dreiecksungleichung ab:

$$\frac{\|t(x)\|}{\|x-a\|} \leq \|Df(g(a))(r(x))\| + \|s(g(x))\| \frac{\|Dg(a)(x-a)\|}{\|x-a\|} + \|r(x)\|.$$

Hier geht nun auf der rechten Seite der erste und der dritte Term für $x \to a$ gegen 0, da ja $r(x) \to 0$, und da $Df(g(a))$ (als lineare Abbildung) stetig ist. Der zweite Term geht gegen 0, da $g(x)$ gegen $g(a)$ strebt (denn $g$ ist stetig bei $a$), da ferner $s(y)$ für $y \to g(a)$ gegen 0 strebt, und da schließlich noch

$$\|Dg(a)(x-a)\| \leq \|Dg(a)\| \cdot \|x-a\|,$$

wo $\|A\|$, für $A \in \mathrm{Hom}(X, Y)$, das Maximum von $\|A(h)\|$ auf der Einheitssphäre $\|h\| = 1$ bedeutet. $\square$

Als unmittelbare Folgerung der Kettenregel erhalten wir aus der linearen Algebra:

**Korollar.** *Unter sonst gleichen Voraussetzungen wie im Satz sei* $X = \mathbb{R}^p$, $Y = \mathbb{R}^q$ *und* $\mathbb{Z} = \mathbb{R}^r$. *Dann gilt für die Jacobi-Matrizen*

$$\mathcal{J}_{f\circ g}(a) = \mathcal{J}_f(g(a)) \cdot \mathcal{J}_g(a),$$

*wo der Punkt Matrizen-Multiplikation bedeutet.*

*Beispiel.* Hat man eine reellwertige Funktionen $f(y_1, \ldots, y_m)$ und setzt man $y_j = g_1(x_1, \ldots, x_n)$, für geeignete rellwertige Funktionen $g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n)$, so nimmt die Kettenregel die folgende leicht einprägsame Gestalt an

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_i}.$$

## 3.6 Nabla oder Gradient

Wir nehmen an, daß $X$ ein euklidischer Vektorraum ist. Das Skalarprodukt bezeichnen wir wie üblich mit $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

**Definition.** Es sei $U \subseteq X$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ in $a$ differenzierbar. Der *Gradient* von $f$ in $a$ ist derjenige Vektor $\operatorname{grad} f(a) \in X$, sodaß gilt:

$$\forall x \in X : \langle \operatorname{grad} f(a), x\rangle = Df(a)(x)$$

Gradient
Nabla

( In der Literatur findet man auch $\nabla f(a)$ für $\operatorname{grad} f(a)$, gesprochen *nabla* $f$.)

*Bemerkung.* Die Existenz und Eindeutigkeit von $\operatorname{grad} f(a)$ ist aus der linearen Algebra bekannt (Man suche dort nach dem Satz: $X \mapsto \operatorname{Hom}(X, \mathbb{R})$, $x_0 \mapsto \langle x_0, \cdot\rangle$ ist ein Isomorphismus von Vektorräumen.)
*Übung.* Man zeige: Ist $X = \mathbb{R}^n$, so ist $\operatorname{grad} f(a) = \mathcal{J}_f(a)^t$.

Die geometrische Bedeutung des Gradienten ist folgendermaßen.

**Satz.** *Sei* $U \in X$ *offen und* $f : U \to \mathbb{R}$ *differenzierbar bei* $a$. *Dann ist*

$$|D_v f(a)| = \sup\{D_u f(a) : \langle u, u\rangle = 1\}$$

*genau dann, wenn* $\operatorname{grad} f(a)$ *ein Vielfaches von* $v$ *ist.*

*Bemerkung.* Die Richtungsableitung $Df_v(a)$ mißt gemäß ihrer Definition die Steigung des Graphen $G_f$ im Punkt $a$ in Richtung $v$. Der Satz besagt also, daß der Gradient die Richtung der stärksten Steigung (oder des stärksten Gefälles) angibt.

*Beweis.* Es gilt ja nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$D_u f(a) = Df(a)(u) = \langle \nabla f(a), u \rangle \leq \langle \nabla f(a), \nabla f(a) \rangle^{\frac{1}{2}} \, \langle u, u \rangle^{\frac{1}{2}},$$

und Gleichheit gilt genau dann, wenn $u$ und $\nabla f(a)$ linear abhängig sind. □

Tangential-Hyperebene

Ist $X = \mathbb{R}^n$ und bezeichnet $G_f \subset \mathbb{R}^{n+1}$ den Graphen von $f$, so bezeichnet man als Tangentialebene an $G_f$ im Punkt $a$ die Menge

$$(a, f(a))^t + \{(x, y)^t : x \in \mathbb{R}^n, y = \mathcal{J}_f(a) \cdot x\}.$$

Wie oben aufgeführt, ist dies die sich $G_f$ im Punkt $a$ am besten anschmiegende Hyperebene. Der Vektor

$$n := \begin{pmatrix} -1 \\ \nabla f(a) \end{pmatrix}$$

steht offenbar senkrecht auf dieser Ebene: für jedes $z$ aus dem *Tangentialraum*

$$\{(x, y)^t : x \in \mathbb{R}^n, y = \langle \mathcal{J}_f(a) \cdot x\}$$

Normale

von $G_f$ bei $(a, f(a))$ gilt ja $\langle z, n \rangle = 0$. Hier benutzen wir das euklidische Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$. Man bezeichnet $n$ daher als Normalenvektor an $G_f$ bei $(a, f(a))$.

## 3.7 Spur und Determinante einer Ableitung

Es sei $X$ ein endlich dimensionaler reeller Vektorraum, etwa $\dim X = n$. Jedem $A \in \mathrm{Hom}(X, X)$. ist dann ein Polynom zugeordnet, nämlich das charakteristische Polynom $\chi_A(x)$ von $A$. Es ist $\chi(x) = \det(xI - M)$, wo $I$ die $n \times n$-Einheitsmatrix ist, und wo $M$ die Matrix von $A$ bezüglich irgendeiner Basis $b_1, \ldots, b_n$ von $X$ ist (d.h. es gilt $Ab = bM$.) Es sei

$$\chi_A(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0.$$

Die Zahl $-a_{n-1}$ heißt *Spur* von $A$, in Zeichen $\mathrm{spur}(A)$. Die Zahl $(-1)^n a_0$ heißt *Determinante* des Endomorphismus $A$, in Zeichen $\det(A)$. Offenbar ist $-a_{n-1}$ die Summe der $n$ (komplexen) Nullestellen von $\chi_A$ und $(-1)^n a_0$ das Produkt der Nullstellen. (Sind mehrfache Nullstellen vorhanden, so muß man mit geeigneten Multiplizitäten zählen — vgl. hierzu eine erste Vorlesung in Algebra.) Ist $M = (\mu_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, so ist

$$\mathrm{spur}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mu_{ii}$$

und natürlich $\det(A)$ gleich der Determinante der Matrix $M$.

Sei nun $U \subseteq X$ offen und $f : U \to X$ differenzierbar in $a$. Dann ist $Df(a) \in \mathrm{Hom}(X, X)$ und dementsprechend ist die Spur und Determinante von $Df(a)$ erklärt.

Divergenz und Jacobi-Determinante

**Definition.** Die Spur und Determinante von $Df(a)$ bezeichnet man als Divergenz und Jacobi-Determinante von $f$ in $a$, in Zeichen

$$\operatorname{div} f(a) = \operatorname{spur}(Df(a)), \qquad \mathrm{J}_f(a) = \det(Df(a)).$$

Ist $X = \mathbb{R}^n$, so ist ja die Jacobi-Matrix die $Df(a)$ bezüglich der kanonischen Basis zugeordnete Matrix, und daher hat man hier

$$\operatorname{div} f(a) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a), \quad \mathrm{J}_f(a) = \det(\mathcal{J}_f(a)).$$

# Kapitel 4

# Höhere Ableitungen

## 4.1 Bezeichnungen

Wie schon im letzten Kapitel betrachten wir Abbildungen $f : U \to Y$, wo $X$ und $Y$ endlich dimensionale Vektorräume sind, und $U$ eine offene Teilmenge von $X$ ist. Nehmen wir an, daß $f$ in jedem Punkt von $U$ in Richtung $v \in X$ differenzierbar ist, so erhalten wir durch differenzieren in Richtung $v$ eine neue Abbildung

$$D_v f : U \to Y.$$

Nehmen wir weiter an, daß $D_v f$ in jedem Punkt in eine Richtung $u$ differenzierbar ist, so erhalten wir durch Richtungsableiten eine weitere Abbildung

$$D_u D_v f : U \to Y.$$

Fahren wir so fort, so erhalten wir (unter geeigneten Differenzierbarkeitsvoraussetzungen) Abbildungen

$$D_{v_1} D_{v_2} \cdots D_{v_r} f : U \to Y,$$

wo die $v_i$ $(1 \leq i \leq r)$ Vektoren in $X$ bezeichnen.

Insbesondere erhalten wir so im Fall $X = \mathbb{R}^n$ und für Vektoren $e_{k_i}$ $(1 \leq i \leq r)$ die höheren Ableitungen

$$D_{e_{k_1}} D_{e_{k_2}} \cdots D_{e_{k_r}} f : U \to Y.$$

Diese bezeichnet man als *partielle Ableitungen der Ordnung* $r$ von $f$. Hierfür schreibt man auch

$$f_{k_r,\ldots,k_2,k_1},$$

(man beachte die Reihenfolge). Ist $f$ in der Gestalt $f(x_1, \ldots, x_n) = \ldots$ angegeben, so sind auch die Schreibweisen

$$\frac{\partial^r}{\partial x_{k_1} \ldots \partial x_{k_2} \partial x_{k_r}} f, \qquad \frac{\partial^r f}{\partial x_{k_1} \ldots \partial x_{k_2} \partial x_{k_r}}$$

üblich. In der Literatur findet man dafür auch noch

$$f_{x_{k_r},\dots,x_{k_2},x_{k_1}}.$$

Man beachte jeweils die Reihenfolge der Indizes. Man kann sie sich so merken: Es wird bei jeder dieser Schreibweisen die dem Symbol $f$ nähst stehende Ableitung zuerst ausgeführt.

$r$-mal partiell differenzierbar

**Definition.** Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to Y$. Dann heißt $f$ *$r$-mal partiell differenzierbar*, wenn alle partiellen Ableitungen der Ordnung $p$ mit $p \leq r$ existieren, und *$r$-mal stetig partiell differenzierbar*, wenn zusätzlich alle partiellen Ableitungen der Ordnung $p$ mit $p \leq r$ stetig sind.

A priori existieren so $2^r$ verschiedene partielle Ableitungen $r$-ter Ordnung. Wir werden aber sehen, daß unter geeigneten Voraussetzungen an $f$ viele darunter identisch sind.

*Beispiel.* Wir betrachten $f(x, y) = \cos(x)+\sin(y)$. Für die zweiten partiellen Ableitungen finden wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} &= -\cos(x), & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= -\sin(x) + \cos(y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= -\sin(x) + \cos(y), & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} &= -\sin(y) \end{aligned}$$

Wir betrachten nun höhere Ableitungen, die sich durch *totales* Differenzieren ergeben. Einfaches Ableiten eines $f : U \to Y$ ($U \subseteq X$ offen) ergibt eine Funktion

$$Df : U \to \mathrm{Hom}(X, Y).$$

Nochmaliges Ableiten ergibt (wir setzen voraus, daß $Df$ wieder in jedem Punkt in $U$ differenzierbar ist) eine Funktion

$$D^2 f : U \to \mathrm{Hom}(X, \mathrm{Hom}(X, Y)).$$

Es ist klar, daß wir diesen Prozeß (unter geeigneten Differenzierbarkeitsvoraussetzungen) iterieren können. Wir gelangen damit zur $r$-ten Ableitung

$$D^r f : U \to \mathrm{Hom}(X, \dots \mathrm{Hom}(X, \mathrm{Hom}(X, Y)) \cdots),$$

wobei hier rechts $r$-mal das Symbol $X$ und Hom auftritt. Wir setzen zur Abkürzung

$$\mathrm{Hom}^r(X, Y) := \mathrm{Hom}(X, \dots \mathrm{Hom}(X, \mathrm{Hom}(X, Y)) \cdots)$$

(wobei rechts $r$-mal das Symbol Hom auftritt).

Ist $\lambda \in \mathrm{Hom}^r(X, Y)$, so können wir die Abbildung

$$\underline{\lambda} : X^r \to Y, \quad \underline{\lambda}(x_1, x_2, \ldots, x_r) = \lambda(x_1)(x_2)\cdots(x_r)$$

betrachten. Es ist klar, daß $\underline{\lambda}$ multilinear ist, d.h. in jedem Argument ist $\underline{\lambda}$ bei sonst fest gehaltenen anderen Argumenten linear. Wir bezeichnen den Raum der multilinearen Abbildungen $X^r \to Y$ mit

$$\mathrm{L}^r(X, Y).$$

Die Zuordnung $\lambda \mapsto \underline{\lambda}$ definiert dann einen Isomorphismus von Vektorräumen

$$\mathrm{Hom}^r(X, Y) \to \mathrm{L}^r(X, Y),$$

wobei wir hierbei gleich noch beide Räume in der naheliegenden Weise als Vektorräume aufgefaßt haben. Wir schreiben daher im Folgenden auch

$$D^r f(a)(x_1, x_2, \ldots, x_r)$$

anstelle von

$$D^r f(a)(x_1)(x_2)\cdots(x_n).$$

*Übung.* Man drücke die Dimension von $\mathrm{Hom}^r(X, Y)$ durch die Dimension von $X$ und $Y$ aus.

**Definition.** Sei $U$ offene Teilmenge von $X$. Eine Funktion $f : U \to Y$ heißt *$r$-mal differenzierbar*, falls

$r$-mal stetig differenzierbar

$$D^p f : U \to \mathrm{Hom}^p(X, Y)$$

für jedes $0 \leq p < r$ differenzierbar ist (wobei $D^0 f = f$ gesetzt ist), und *$r$-mal stetig differenzierbar*, falls $D^r f$ stetig ist. Die Menge aller $r$-mal stetig differenzierbaren Funktionen auf $U$ wird mit $\mathcal{C}^r(U, Y)$ bezeichnet.

*Bemerkung.* Es ist $\mathcal{C}^r(U, Y)$ ein Untervektorraum im Raum aller Funktionen auf $U$ mit Werten in $Y$.

## 4.2 Die Hauptsätze

Der Zusammenhang zwischen den iterierten Richtungsableitungen und den höheren (totalen) Ableitungen wird in den beiden folgenden Sätzen zusammengefaßt.

**Satz.** *Sei $U \subseteq X$ offen und $f : U \to Y$ sei $r$-mal differenzierbar. Für jedes $1 \leq p < r$ und für alle Vektoren $x_1, \ldots, x_p$ existiert dann die Richtungsableitung $D_{x_1} \cdots D_{x_p} f$. Diese ist differenzierbar in $U$. Ist $a \in U$, so gilt für $1 \leq p \leq r$ die Formel*

$$D_{x_1} \cdots D_{x_p} f(a) = D^p f(a)(x_1, \ldots, x_n).$$

*Beweis.* Für $p = 1$ haben wir dies im letzten Kapitel gesehen. Wir führen Induktion über $p$. Wir nehmen also an, der Satz sei für $p \geq 1$ richtig, und $f$ sei $p+1$-mal differenzierbar. Wir betrachten die Abbildung

$$a \mapsto D_{x_1} \dots D_{x_p} f.$$

Wir wollen zeigen, daß sie in $U$ differenzierbar ist und die Richtungsableitung in Richtung eines gegebenen Vektoren $x_0$ und in $a \in U$ berechnen. Nach Induktionsvoraussetzung können wir sie jedenfalls schreiben als

$$v \circ D^p f.$$

Hierbei ist die Abbildung

$$v : \mathrm{L}^p(X, Y) \to Y$$

definiert durch

$$v(\phi) = \phi(x_1, \dots, x_p).$$

Die Abbildung $v$ ist linear. Insbesondere ist sie differenzierbar und $Dv(\varphi) = v$. Da auch $D^p f$ differenzierbar ist, sehen wir so, daß $a \mapsto D_{x_1} \dots D_{x_p} f(a)$ differenzierbar ist. Mit Hilfe der Kettenregel erhalten wir weiter

$$\begin{aligned} D\,(D_{x_1} \dots D_{x_p} f)(a) &= D(v \circ D^p f)(a) \\ &= Dv\big(D^p f(a)\big) \circ D\,(D^p f)(a) \\ &= v \circ D\,(D^p f)(a) \end{aligned}$$

Für $x_0 \in X$ gilt damit

$$\begin{aligned} D_{x_0}\,(D_{x_1} \dots D_{x_p} f)(a) &= v\big(D\,(D^p f)(a)(x_0)\big) \\ &= D^{p+1} f(a)(x_0)(x_1, \dots, x_p) \\ &= D^{p+1} f(a)(x_0, x_1, \dots, x_p) \end{aligned}$$

Dies ist aber gerade die behauptete Formel. □

**Korollar.** *Sei $U \in \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to Y$ sei $r$-mal differenzierbar. Dann gilt für $h^{(1)}, \dots, h^{(r)} \in X$ und $a \in U$ die Formel*

$$D^r f(a)(h^{(1)}, \dots, h^{(r)}) = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_r=1}^{n} f_{i_r, \dots, i_2, i_1}(a)\, h^{(1)}_{i_1}\, h^{(2)}_{i_2} \cdots h^{(r)}_{i_r}.$$

*Hierbei ist $h^{(p)} = (h^{(p)}_1, \dots, h^{(p)}_n)^t$.*

*Beweis.* Dies folgt, indem man

$$h^{(p)} = \sum_{i_p=1}^{n} h_{i_p}^{(p)} \, e_{i_p}$$

schreibt, wo $e_i$ die Vektoren der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^n$ bedeuten, und dies in die linke Seite der behaupteten Formel einsetzt. Wegen der Multilinearität von $D^p f(a)$ kann man *ausdistribuieren* und erhält so

$$D^r f(a)(h^{(1)}, \ldots, h^{(r)}) = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_r=1}^{n} D^r f(a)(e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}) \, h_{i_1}^{(1)} \cdots h_{i_r}^{(r)}.$$

Nun kann man den vorstehenden Satz anwenden, wonach ja

$$D^r f(a)(e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}) = f_{i_r,\ldots,i_1}(a)$$

gilt. □

Der vorangehende Satz läßt sich umkehren, wenn man voraussetzt, daß die iterierten Richtungsableitungen stetig sind. Wir formulieren diese Umkehrung hier für den Spezialfall von Funktionen in $n$ Veränderlichen, d.h. für Funktionen mit einer Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ als Definitionsbereich.

**Satz.** *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to Y$. Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *$f$ ist $r$-mal stetig partiell differenzierbar.*
2. *$f$ ist $r$-mal stetig differenzierbar, d.h. $f \in \mathcal{C}^r(U, Y)$.*

*Beweis.* Nach dem vorangehenden Satz impliziert 2. die Behauptung 1. : Für $1 \leq p \leq r$ ist ja $f_{i_p,\ldots,i_1} = v \circ D^p f$, wo $v(\lambda) = \lambda(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p})$ für $\lambda \in \mathrm{Hom}^r(\mathbb{R}^n, Y)$ ist. Lediglich die Stetigkeit $f_{i_p,\ldots,i_1}$ wird dort nicht ausdrücklich festgestellt. Sie folgt aber sofort aus der von $v$ und der von $D^r f$ (letztere nach Voraussetzung).

Wir zeigen nun, daß 1. die Behauptung 2. impliziert. Hierzu führen wir Induktion über $r$. Für $r = 1$ ist die gewünschte Implikation gerade der Satz in Abschnitt 3.4, jedenfalls für den Fall $Y = \mathbb{R}$. Dann ist sie aber auch für den Fall $Y = \mathbb{R}^m$ klar, denn — wie schon im vorangehenden Kapitel wiederholt benutzt — ist eine Abbildung mit Bildraum $\mathbb{R}^m$ genau dann stetig differenzierbar, wenn ihre Komponentenfunktionen es sind. Ist $Y$ schließlich nicht identisch mit einem $\mathbb{R}^m$, so gibt es jedenfalls einen Isomorphismus von Vektorräumen $\iota : Y \to \mathbb{R}^m$. Schreibt man $f = \iota \circ g$ mit $g : U \to \mathbb{R}^m$, also

$g = \iota^{-1} \circ f$, so ist nach der Kettenregel (und weil lineare Abbildungen differenzierbar sind) $g$ stetig partiell differenzierbar, also stetig differenzierbar, und daher auch $f$ stetig differenzierbar.

Die behauptete Implikation gelte nun für ein $r \geq 1$. Wir nehmen an, daß $f$ mindestens $r+1$-mal stetig partiell differenzierbar ist. Zunächst wissen wir nach Induktionsvoraussetzung, daß

$$D^r f : U \to \mathrm{Hom}^r(\mathbb{R}^n, Y)$$

existiert und stetig ist. Es genügt zu zeigen, daß $D^r f$ stetig partiell differenzierbar ist, denn dann folgt ja mit dem schon Bewiesenem, daß $D^r f$ total stetig differenzierbar ist, also $f \in \mathcal{C}^{r+1}(U, Y)$.

Zum Beweis der stetigen partiellen Differenzierbarkeit von $D^r f$ betrachten wir die kanonische Basis $e_1, \ldots, e_n$ von $\mathbb{R}^n$. Es ist dann nach dem Korollar zum letzten Satz

$$D^r f(a) = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_r=1}^{n} f_{i_r,\ldots,i_1}(a)\ \lambda_{i_1,\ldots,i_n},$$

wobei $\lambda_{i_1,\ldots,i_n}$ die Elemente in $\mathrm{Hom}^r(X, Y)$ sind, deren Wirkung auf Vektoren $x^{(p)} = (x^{(p)}, \ldots, x^{(p)})^t \in \mathbb{R}^n$ durch

$$\lambda_{i_1,\ldots,i_n}(x^{(1)}, \ldots, x^{(r)}) = x^{(1)}_{i_1} \cdots x^{(r)}_{i_r}$$

erklärt ist. (In der Tat bilden die $\lambda_{i_1,\ldots,i_n}$ zusammen sogar eine Basis von $\mathrm{Hom}^r(\mathbb{R}^n, Y)$.) Wir erkennen nun sofort, daß $D^r f$ partielle differenzierbar ist. Für $1 \leq k \leq n$ und reelles $t$ ist nämlich

$$\frac{D^r f(a + te_k) - D^r f(a)}{t} = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_r=1}^{n} \frac{f_{i_r,\ldots,i_1}(a + te_k) - f_{i_r,\ldots,i_1}(a)}{t}\ \lambda_{i_1,\ldots,i_n},$$

und für $t \to 0$ strebt dieser Quotient gegen

$$\sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_r=1}^{n} f_{i_r,\ldots,i_1,k}(a)\ \lambda_{i_1,\ldots,i_n}.$$

Da die partielle Ableitungen $f_{i_r,\ldots,i_1,k}$ stetig sind, erkennt man so auch noch die Stetigkeit von $D_{e_k} D^r f$. □

Wie schon oben erwähnt, gibt es a priori $2^r$ partielle Ableitungen $r$-ter Ordnung, und iterierte Richtungsableitungen hängen a priori von der Reihenfolge ab, in der sie genommen werden. Im Fall der *stetigen* Differenzierbarkeit ist dies allerdings (und glücklicherweise) nicht wahr. Wir beweisen zunächst einen Spezialfall dieses wichtigen Phänomens. Allerdings ist dieser Spezialfall und sein Beweis schon der Prototyp des allgemeinen Sachverhalts, der dann mit *abstract nonsense*[1] aus dem Spezialfall folgen wird.

**Lemma.** *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, und es sei $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal partiell differenzierbar. Die zweiten partiellen Ableitungen $f_{1,2}$ und $f_{2,1}$ seien der Stelle $a \in U$ stetig. Dann gilt*

$$f_{1,2}(a) = f_{2,1}(a).$$

*Beweis.* Es sei $a = (x_0, y_0)$. Wir betrachten den Ausdruck

$$W = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0).$$

Es sei

$$\varphi(x) = f(x, y_0 + k) - f(x, y_0).$$

Wir fassen hier $x$ als Variable und $y_0$ als *Parameter* auf. Damit erhalten wir

$$W = \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0).$$

Auf diese Gleichung können wir nun den Mittelwertsatz aus der Analysis I anwenden, so daß wir folgenden Ausdruck erhalten:

$$W = h\,\varphi'(x_0 + \vartheta_1 h),$$

mit einem geeigneten $0 < \vartheta_1 < 1$. Nun ist aber

$$\varphi'(x_0 + \vartheta_1 h) = f_x(x_0 + \vartheta_1 h, y_0 + k) - f_x(x_0 + \vartheta_1 h, y_0).$$

Weil nach Voraussetzung $f_{xy}$ existiert, können wir hierauf den Mittelwertsatz noch einmal anwenden, jetzt aber im zweiten Argument:

$$W = h \cdot k \cdot f_{xy}(x_0 + \vartheta_1 h, y_0 + \vartheta_2 k),$$

wieder mit einem geeigneten $0 < \vartheta_2 < 1$

Analog finden wir

$$W = h \cdot k \cdot f_{yx}(x_0 + \vartheta_3 h, y_0 + \vartheta_4 k),$$

mit $0 < \vartheta_3, \vartheta_4 < 1$, wenn wir mit der Funktion

$$\psi(y) = f(x_0 + h, y) - f(x_0, y)$$

anstelle von $\varphi(x)$ starten.

[1]Dieser Ausdruck wurde vermutlich von dem Mathematik-Vielschreiber Serge Lang geprägt.

Durch Vergleich der beiden für $W$ hergeleiteten Ausdrücke finden wir

$$f_{xy}(x_0 + \vartheta_1 h, y_0 + \vartheta_2 k) = f_{yx}(x_0 + \vartheta_3 h, y_0 + \vartheta_4 k)$$

Lassen wir nun h und k gegen 0 streben unter Berücksichtigung , daß $f_{xy}$ und $f_{yx}$ existieren und im Punkte $a = (x_0, y_0)$ stetig sind, ergibt sich

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0),$$

was ja zu zeigen war. □

Der vorstehende Hilfssatz verallgemeinert sich auf beliebige $r$-mal stetig differenzierbare Abbildungen. Um ihn zu formulieren haben wir noch ein Hilfsmittel aus der Algebra einzuführen.

Symmetrische Gruppe

Mit $S_r$ bezeichnen wir die *symmetrische Gruppe* von $r$ Elementen. Es ist also $S_r$ die Menge aller bijektiven Abbildungen

$$\sigma : \{1, 2, \ldots, r\} \to \{1, 2, \ldots, r\}.$$

Sind $\rho, \sigma \in S_r$, so ist auch ihr Kompositum $\rho \circ \sigma$ wieder in $S_r$. Die Elemente von $S_r$ nennet man auch Permutationen. Spezielle Permutationen sind solche, die nur zwei benachbarte Zahlen vertauschen: ist $1 \leq p < r$ so setzt man

$$\tau_p(i) = \begin{cases} p+1 & \text{falls } i = p, \\ p & \text{falls } i = p+1, \\ i & \text{sonst.} \end{cases}$$

Permutationen dieser Gestalt nennt man auch Transpositionen. (Ganz allgemein versteht man unter einer Transposition eine Permutation, die zwei fest gewählte, nicht notwendig benachbarte Zahlen vertauscht und alle anderen festläßt.) Unsere speziellen Transpositionen wollen wir für den Augenblick *Nachbar-Transpositionen* nennen. In der Algebra (genauer im Teilgebiet der Gruppentheorie) wird gezeigt, daß die $\tau_p$ die Gruppe $S_r$ erzeugen. Einfach ausgedrückt heiß dies, daß zu jeder Permutation $\sigma \in S_r$ Nachbar-Transpositionen $\tau_p$ $(1 \leq p \leq m)$ exisieren, sodaß

$$\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \tau_m.$$

**Satz.** *Sei $U \subseteq X$ offen, $f \in \mathcal{C}^r(U, Y)$ und $a \in U$. Dann ist $D^r f(a)$ symmetrisch, d.h. für alle $x_1, \ldots, x_n \in X$ und alle Permutationen $\sigma \in S_r$ gilt*

$$D^r f(a)(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(r)}) = D^r f(a)(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

*Bemerkung.* Insbesondere kommt es also bei eine $r$-mal stetig differenzierbaren Abbildung bei der Bildung von iterierten Richtungsableitungen nicht auf die Reihenfolge der Operationen $D_v$ an. Genauer hat man (stetige Differenzierbarkeit vorausgesetzt !)

$$D_{x_{\sigma(1)}} D_{x_{\sigma(2)}} \cdots D_{x_{\sigma(r)}} f = D_{x_1} D_{x_2} \cdots D_{x_r} f.$$

Für partielle Ableitungen bedeutet dies (stetige Differenzierbarkeit vorausgesetzt !)

$$\frac{\partial^r f}{\partial x_{\sigma(1)} \partial x_{\sigma(2)} \cdots \partial x_{\sigma(r)}} = \frac{\partial^r f}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_r}.$$

*Beweis.* Es genügt, die erste Formel in der angeführten Bemerkung zu beweisen. Wir zeigen sie zunächst für $r = 2$. Hieraus ergibt sich dann die allgemeine Formel mittels etwas Algebra.

Es seien also $x, y \in X$ gegeben. Wir wählen Isomorphismen von Vektorräumen

$$\kappa : X \to \mathbb{R}^m, \quad \iota : \mathbb{R}^n \to Y$$

Damit können wir dann $f = \iota \circ g \circ \kappa$, schreiben, wobei $g$ eine Abbildung $g : \kappa(U) \to \mathbb{R}^n$ ist und $\kappa(U) \subset \mathbb{R}^m$ (in der Tat ist $f = \iota^{-1} \circ g \circ \kappa^{-1}$). Man überlegt sich leicht, daß $\kappa(U)$ offene Teilmenge des $\mathbb{R}^m$ ist (es sind ja die linearen Abbildungen $\kappa$ und $\kappa^{-1}$ stetig), und daß $f$ wie $g$ zweimal stetig differenzierbar ist. Nach Kettenregel hat man

$$Df = D(\iota \circ g \circ \kappa)(a) = \iota \circ Dg(\kappa(a)) \circ \kappa,$$

(wegen $D(\iota)(\cdot) = \iota$ und der analogen Formel für $\kappa$). Schreibt man dies in der Form

$$Df = \phi \circ Dg \circ \kappa,$$

wo $\phi(A) = \iota \circ A \circ \kappa$ für $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ ist, so kann man hierauf nochmals die Kettenregel anwenden. Man findet so

$$D^2 f(a) = D(\phi \circ Dg \circ \kappa)(a) = \phi \circ D^2 g(\kappa(a)) \circ \kappa = \iota \circ [D^2 g(\kappa(a)) \circ \kappa] \circ \kappa.$$

Hier haben wir wieder $D\phi(\cdot) = \phi$ benutzt (was wiederum aus der Linarität von $\phi$ folgt). Damit erhalten wir

$$D_x D_y f(a) = D^2 f(a)(x, y) = \iota D^2 g(\kappa(a))(\kappa x)(\kappa y) = \iota D_{\kappa(x)} D_{\kappa(y)} g(a),$$

(wobei wir einige Klammern weggelassen haben und $\kappa x$ statt $\kappa(x)$ etc. geschrieben haben), oder also

$$D_x D_y f = \iota \circ D_{\kappa(x)} D_{\kappa(y)} g.$$

Es genügt also $D_u D_v g = D_v D_u g$ für $u, v \in \mathbb{R}^m$ nachzuweisen. Dabei können wir sogar noch annehmen, daß $g$ rellwertig ist. Schreibt man nämlich $g = (g_1, \ldots, g_n)^t$ (d.h. die $g_i$ sind die Komponentenfunktionen von $g$), so überzeugt man sich leicht unmittelbar anhand der Definition der Richtungsableitung, daß $D_u D_v g = (D_u D_v g_1, \ldots, D_u D_v g_n)^t$. Wegen der Lineanrität von $D_u D_v g$ in $u$ und in $v$ kann man ferner noch annehmen, daß $u$ und $v$ der kannonischen Basis des $\mathbb{R}^m$ angehören. Dann ist die behauptete Formel aber gerade von der Gestalt $g_{p,q} = g_{q,p}$. Indem wir in $g$ alle Argumente außer dem $p$-ten und $q$-ten festhalten, sehen wir, daß die letzte Formel mit der des vorangehenden Lemmas identisch ist.

Nach dem soeben Bewiesenem habe wir also für eine zweimal stetig differenzierbar Abbildung
$$D_x D_y f = D_y D_x f.$$

Hieraus folgt aber sofort die allgemeine Behauptung, falls $\sigma$ eine Nachbar-Transposition ist, etwa $\sigma = \tau_p$. Dann ist nämlich

$$\begin{aligned} &D_{x_{\sigma(1)}} D_{x_{\sigma(2)}} \cdots D_{x_{\sigma(r)}} f \\ &= D_{x_1} \cdots D_{x_{p-1}} D_{x_{p+1}} D_{x_p} D_{x_{p+2}} \cdots D_{x_r} f = D_{x_1} D_{x_2} \cdots D_{x_r} f, \end{aligned}$$

wie wir sehen, indem wir den schon betrachteten Fall $r = 2$ auf die (mindestens) zweimal stetig differenzierbare Funktion $F_1 := D_{x_{p+2}} \ldots D_{x_r} f(a)$ anwenden.

Die allgemeine Behauptung folgt schließlich, indem man eine beliebige Permutation als Produkt $\sigma = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_m$ von Nachbar-Transpositionen schreibt. Danach erhält man nämlich $D_{x_{\sigma(1)}} D_{x_{\sigma(2)}} \cdots D_{x_{\sigma(r)}} f$ durch sukzessives Vertauschen zweier Richtungsableitungen in $D_{x_1} D_{x_2} \cdots D_{x_r} f$, was wir ja eben gerechtfertigt haben. Diese vielleicht etwas vage klingende Begründung kann man auch präzise geben. Allerdings hat man dazu den Begriff der Gruppenaktion aus der Gruppentheorie einzuführen. Dies würde uns aber zu weit vom Thema abbringen, und wir lassen dies als Fingerübung für den Zeitpunkt der Vorbereitung zum Zwischenexamen und nach der ersten Algebra-Vorlesung. □

## 4.3 Taylorentwicklung

Wir erinnern zunächst noch einmal an den Satz von Taylor für Funktionen einer reelle Variablen. Ist $g$ eine Funktion in $\mathcal{C}^k((a,b), \mathbb{R})$, etwa $a < 0 < b$, so gibt es zu jedem $t \in (a,b)$ eine reelle Zahl $0 < \vartheta < 1$, so daß

$$g(t) = g(0) + g'(0)t + \cdots + \frac{g^{(k-1)}(0)}{(k-1)!} t^{k-1} + \frac{g^{(k)}(\vartheta t)}{k!} t^k.$$

Etwas ungenauer haben wir also eine Darstellung

$$g(t) = \text{“Polynom vom Grad} < k\text{”} + R(t),$$

wobei

$$R(t) = O(t) \quad (t \to 0).$$

Der klassische Satz von Taylor ist im Allgemeinen etwas allgemeiner formuliert, nämlich für einen beliebigen Entwicklungspunkt im Intervall $(a, b)$, und es genügt, vorauszusetzen, daß $g$ nur $k$-mal differenzierbar ist (d.h. die $k$-te Ableitung muß nicht unbedingt stetig sein). Wir werden im Folgenden diesen Satz auf den mehrdimensionalen Fall verallgemeinern. Wie schon in den beiden vorhergehenden Kapiteln bezeichnet $X$ im Folgenden durchgehend einen endlich dimensionalen normierten Vektorraum.

Satz von Taylor

**Satz.** *Sei $U \subseteq X$ offen und $f \in C^k(U, \mathbb{R})$. Sind $a \in U$ und $h \in X$, sodaß die Verbindungsstrecke von $a$ nach $a + h$ ganz in $U$ gelegen ist, so gibt es ein $0 < \vartheta < 1$, sodaß gilt:*

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + Df(a)(h) + \frac{1}{2!}D^2 f(a)(h,h) + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{(k-1)!}D^{(k-1)}f(a)h^{k-1} + \frac{1}{k!}D^k f(a+\vartheta h)(h,\dots,h). \end{aligned}$$

*(Hierbei meinen wir mit $D^r f(a)(h,\dots,h)$, daß alle $k$ Argumente der multilinearen Abbildung $D^r f(a)$ als $h$ zu nehmen sind. Als Verbindungsstrecke von $a$ nach $a + h$ bezeichnet man die Menge aller Punkte von $X$ der Gestalt $a + th$, wo $t$ das Intervall $[0, 1]$ durchlauft.)*

*Beweis.* Wir wenden den Satz von Taylor für Funktionen einer reellen Variablen auf die Funktion

$$g(t) = f(a + th)$$

an. Nach Voraussetzung ist diese jedenfalls auf einem offenen, das Intervall $[0, 1]$ umfassenden Intervall definiert. Wir haben also die anfangs zitierte Entwicklung von $g(t)$ um $t = 0$ zur Verfügung. In der Tat ist dies aber genau die Formel unseres Satzes, denn $g$ ist $r$-mal differenzierbar und

$$g^{(r)}(t) = D^r f(a + th)(h,\dots,h).$$

Zum Nachweis dieser Formel (und der $k$-maligen Differenzierbarkeit von $g$) wenden wir die Kettenregel an. Dazu schreiben wir $g$ als $g = f \circ \gamma$, wo $\gamma(t) = a + th$ ist. Als affine Abbildung ist $\gamma$ differenzierbar. Es gilt $D\gamma(t) : \mathbb{R} \mapsto X$, $u \mapsto uh$. Nach der Kettenregel ist dann mit $f$ auch $g = f \circ \gamma$ differenzierbar, und, wie wir gleich nachrechnen werden, findet man

$$g' = (D_h f) \circ \gamma.$$

Da nun $D_h f \in \mathcal{C}^{(k-1)}(U, \mathbb{R})$, ergibt die gleiche Formel auf $D_h f$ an Stelle von $f$ angewandt die Differenzierbarkeit von $g'$ und die Formel $g'' = (D_h(D_h f))\circ$

$\gamma$. Mittels Induktion erhält man so die $k$-malige Differenzierbarkeit von $g$ und für jedes $0 \leq r \leq k$ die Formel

$$g^{(r)} = (D_h^r f) \circ h.$$

Wegen $D_h^r f(b) = D^r f(b)(h, \ldots, h)$ ist dies aber gerade die oben ausgesprochenen Behauptung.

Es bleibt, den Nachweis von $g' = (Df) \circ \gamma$ zu erbringen. Dazu sei $u \in \mathbb{R}$. Dann ergibt die Kettenregel

$$\begin{aligned} g'(t) \cdot u &= Dg(t)(u) \\ &= Df(\gamma(t))(D\gamma(t))(u) \\ &= Df(\gamma(t))(uh) \\ &= uD_h f(\gamma(t)). \end{aligned}$$

Dies ist aber gerade die gewünschte Formel. □

Wir wollen jetzt die Formel des letzten Satzes im Fall $X = \mathbb{R}^n$ etwas expliziter ausgestalten. Hierzu beweisen wir zunächst

**Lemma.** *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^k(U, \mathbb{R})$ und $a \in U$. Für $1 \leq r \leq k$ hat man dann die Formel*

$$D^r f(a)(h, \ldots, h) = \sum_{i_1 + \cdots + i_n = r} \frac{r!}{i_1! \ldots i_n!} D_1^{(i_1)} \cdots D_n^{(i_n)} f(a)\, h_1^{(i_1)} \cdots h_n^{(i_n)}$$

*Hierbei ist $h = (h_1, \ldots, h_n)^t$ ein beliebiger Vektor im $\mathbb{R}^n$, und die Summe ist über alle $n$-Tupel $(i_1, \ldots, i_n)$ von ganzen Zahlen $i_j \geq 0$ zu nehmen, die der Bedingung $i_1 + \cdots + i_n = r$ genügen.*

*Beweis.* Wir haben oben schon gesehen, daß

$$D^r f(a)(h, \ldots, h) = \sum_{j_1, \ldots, j_r = 1}^{n} f_{j_1, \ldots, j_r}(a)\, h^{j_1} \ldots h^{j_r}.$$

Die Summation ist hier über die Menge

$$I := \{(j_1, \ldots, j_r) : 1 \leq j_1, \ldots, j_r \leq n\}$$

zu nehmen (die $j_p$ sind natürlich als ganze Zahlen zu wählen). Wir betrachten nun die Abbildung

$$\alpha : M \to N := \{(i_1, \ldots, i_n) : i_1, \ldots, i_n \geq 0,\ i_1 + \cdots + i_n = r\},$$

die jedem $j := (j_1, \ldots, j_r)$ das $n$-Tupel $(i_1, \ldots, i_n)$ zuordnet, wo $i_p$ die Anzahl des Auftretens der Zahl $p$ in $j$ bezeichnet. Offenbar ist $\alpha$ surjektiv. Der Punkt ist nun, daß ein Term in der letzten Summe nur vom Bild unter $\alpha$ abhängt, denn für $(i_1, \ldots, i_n) = \alpha(j_1, \ldots, j_r)$ ist ja offenbar

$$h^{j_1} \ldots h^{j_r} = h_1^{i_1} \ldots h_n^{i_n},$$

und wegen der $r$-fachen stetige Differenzierbarkeit gilt

$$D^{j_1} \ldots D^{j_r} f = D_1^{i_1} \ldots D_n^{i_n} f.$$

Also kann man die letzte Summe auch schreiben als

$$D^r f(a)(h, \ldots, h) = \sum_{i_1+\cdots+i_n=r} D_1^{(i_1)} \cdots D_n^{(i_n)} f(a)\, h_1^{(i_1)} \cdots h_n^{(i_n)} \cdot \#\alpha^{-1}(i)$$

wo $\#\alpha^{-1}(i)$ die Anzahl der Urbilder von $i = (i_1, \ldots, i_n)$ unter $\alpha$ bezeichnet. Unser Satz folgt nun aus dem nachstehenden Lemma. $\square$

**Lemma.** *Die Anzahl der Möglichkeiten, $r$ Personen auf $n$ Räume zu verteilen, wo Raum Nr. $q$ genau $i_q$ Personen fassen soll, und wobei $i_1+\cdots+i_n = r$ gilt, ist gleich*

$$\frac{r!}{i_1! \ldots i_n!}.$$

Die Personen des Lemmas entsprechen den Stellen eines $r$-Tupels $(j_1, \ldots, j_r)$, und der Raum Nr. 1 entspricht der Menge der Stellen, die eine 1 enthalten etc. Die im letzten Lemma auftretenden Zahlen heißen Multinomialkoeffizienten. Der Name erklärt sich aus der Formel

Multinomial-koeffizienten und multinomische Formeln

$$(a_1 + \cdots + a_n)^r = \sum_{i_1+\cdots+i_n=r} \frac{r!}{i_1! \ldots i_n!} a_1^{i_1} \cdots a_1^{i_n},$$

die das Produkt der linken Seite als Summe von *Multinomen* mit geeigneten Koeffizienten (eben den Multinomialkoeffizienten) schreibt. Den Beweis dieser Formel als auch des Lemmas lassen wir als Übung. Man erbringt sie leicht, indem man sich an dem (bekannten) Fall $n = 2$ orientiert.

Wir sehen also, daß für eine Funktion von $n$ reellen Variablen die Abbildung $h \mapsto D^r f(a)(h, \ldots, h)$ ein Polynom in $h_1, \ldots, h_n$ ist. Genauer ist es sogar ein *homgenes* Polynom vom *Grad* $r$, d.h. ein Polynom, welches nur Monome der Gestalt

Homogene Polynome

$$h_1^{i_1} \cdots h_n^{i_n}$$

enthält, für die der *Grad* $i_1 + \cdots + i_n$ stets gleich $r$ ist. Der Satz von Taylor kann nun für Funktionen mit Definitionsbereich im $\mathbb{R}^n$ mittels des vorletzten Lemmas in der folgenden Form wiederholt werden:

**Satz.** *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^k(U, \mathbb{R})$ und $a \in U$. Es sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf dem $\mathbb{R}^n$ und $r > 0$ so gewählt, daß $U_r(a) \subset U$ (wobei $U_r(a)$ bezüglich der gewählten Norm gebildet ist). Dann gibt es eine Konstante $C = C(r)$, sodaß für alle $h \in U_r(0)$ gilt:*

$$|f(a+h) - \sum_{r=0}^{k-1} p_r(h_1, \ldots, h_n)| \leq C\,\|h\|^n.$$

*Hierbei ist $p_r$ das Polynom auf der rechten Seite der Formel des vorstehenden Lemmas.*

*Bemerkung.* Man kann, wie im Fall einer Variablen, beweisen, daß die $p_r$ wie im Satz die einzigen homogenen Polynome vom Grad $r$ sind, sodaß die dort ausgesprochen Tatsache gilt. Genauer gilt sogar Folgendes: Hat man Polynome $p_0, \ldots, p_{k-1}$, wobei $p_r$ homogen vom Grad $r$ ist, und gilt

$$\lim_{h \mapsto 0} \frac{R(h)}{\|h\|^{k-1}} = 0,$$

wo

$$R(h) := f(a+h) - \sum_{r=0}^{k-1} p_r(h)$$

gesetzt ist, dann ist $p_r$ gleich der rechten Seite der Formel im oben aufgeführten Lemma. (vgl. die entsprechende Übungsaufgabe im Anhang B).

Wichtig ist der Spezialfall $k = 2$. Hier kann man das Polynom $p_2$ noch in matrizieller Form schreiben.

Hessesche

**Definition.** Sei $f$ eine zweimal stetig differenzierbare Abbildung von $n$ Variablen. Die *Hessesche von $f$ im Punkt $a \in \mathbb{R}^n$* ist definiert als die Matrix

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} f_{1,1}(a) & \ldots f_{1,n}(a) \\ f_{2,1}(a) & \ldots f_{2,n}(a) \\ \vdots & \vdots \\ f_{n,1}(a) & \ldots f_{n,n}(a) \end{pmatrix}.$$

*Bemerkung.* Da wir voraussetzen, daß $f$ stetig differenzierbar ist, können wir schließen, daß $H_f(a)$ symmetrisch ist, d.h. symmetrisch unter Spiegelung an der Hauptdiagonalen. In Formeln gilt also

$$H_f(a)^t = H_f(a).$$

Das Polynom

$$p_2(h_1, \ldots, h_n) = \sum_{i,j=1}^{n} f_{i,j}(a)\; h_i h_j$$

des letzten Satzes können wir mittels der Hesseschen schreiben als

$$p_2(h) = h^t H_f(a)h.$$

Hier ist auf der rechten Seite das Matrixprodukt der einzeiligen Matrix $h^t$ mit $H_f(a)$ und dann mit der einspaltigen Matrix $h$ zu nehmen. Mit der Jacobi-Matrix und der Hesseschen erhalten wir so:

Satz von Taylor und Hessesche

**Satz.** *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^k(U, \mathbb{R})$, sei $a \in U$ und $r > 0$ so gewählt, daß $U_r(a) \subset U$ (insbesondere also $f(a+h)$ für $h \in U_r(0)$ erklärt ist). Dann gibt es zu jedem $h \in U_r(0)$ ein $0 < \theta < 1$, sodaß*

$$f(a+h) = f(a) + \mathcal{J}_f(a)h + \frac{1}{2}h^t H_f(a+\theta h)h.$$

## 4.4 Intermezzo: Quadratische Formen

Wir haben gesehen, daß für eine zweimal stetig differenzierbare Funktion von $n$ rellen Variablen die quadratische und symmetrische $n \times n$-Matrix $H_f(a)$ und das *quadratische* Polynom $h^t H_f(a)h$ (in den $n$ Variablen $h = (h_1, \ldots, h_n)^t$ eine wichtige Rolle spielen. Wir wollen solche Polynome nun etwas genauer studieren.

Quadratische Form

**Definition.** Eine *quadratische Form* von $n$ Variablen ist ein homogenes Polynom in $n$ Variablen vom Grad 2.

Die quadratische Form $x_1^2 + \cdots + x_n^2$ hat die spezielle Eigenschaft, daß sie stets nicht-negative Werte annimmt. (Dies erkannt man sofort an ihrer speziellen Gestalt.) Diese Eigenschaft spielt in unserer weiteren Theorie (und auch sonst) eine wichtige Rolle.

Definite Formen

**Definition.** Eine quadratische Form $Q(x)$ von $n$ Variablen heißt

- positiv definit, falls $\forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0 : Q(x) > 0$.
- negativ definit, falls $\forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0 : Q(x) < 0$.
- positiv semi-definit, falls $\forall x \in \mathbb{R}^n : Q(x) \geq 0$.
- positiv semi-definit, falls $\forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0 : Q(x) \leq 0$.
- indefinit, falls $\exists x, y \in \mathbb{R}^n : Q(x) > 0,\ Q(y) < 0$.

Offenbar gehört jede quadratische Form einer der aufgelisteten Kategorien an. Beispiele erhält in der Form

$$Q(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_a^2 - x_{a+1}^2 - \cdots - x_{a+b}^2 \quad (a + b \leq n).$$

Dies sind aber im gewissen Sinne auch schon die Prototypen von quadratischen Formen. Es gilt nämlich:

**Satz.** *Sei $Q(x)$ eine reelle quadratische Form in $n$ Variablen (d.h. für $x \in \mathbb{R}^n$ erklärt). Dann gibt es eine Matrix $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ und ganze Zahlen $a, b \geq 0$, sodaß*

$$Q(x) = \sum_{p=1}^{a} y_p^2 - \sum_{p=a+1}^{a+b} y_p^2,$$

*wo $y = Ax$, $y = (y_1, \ldots, y_n)^t$ ist. Die Zahlen $a$ und $b$ sind durch $Q$ eindeutig bestimmt.*

Signatur einer quadratischen Form

*Bemerkung.* Das Paar $(a, b)$ bezeichnet man als Signatur von $Q$. An der Signatur erkennt man offenbar sofort, welcher Definitheitskategorie $Q$ angehört. Die Signatur kann man zu vorgelegtem $Q$ mittels eines einfachen Algorithmus ausrechnen, wie der folgende Beweis zeigt.

*Beweis des Satzes..* Für $n = 1$ ist der Satz trivial, und den allgemeinen Fall kann man mittels Induktion analog zur Methode für $n = 2$ einsehen; wir lassen die Details der Induktion als Übungsaufgabe.

Im Fall $n = 2$ ist die Methode des Beweises als *quadratisches Ergänzen* bekannt:

$$ax^2 + bxy + cy^2 = \left(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2\sqrt{a}}y\right)^2$$

Hier haben wir $a > 0$ und $D := b^2 - 4ac \geq 0$ angenommen. Die anderen Fälle $a < 0$ bzw. $a = 0$, $c \neq 0$ und $D \geq 0$ oder $D < 0$ behandelt man analog. Ist $a = c = 0$, so benutzt man $xy = (x + y)^2 - (x - y)^2$. $\square$

Man kann quadratische Formen auch in matrizieller Form studieren. Zunächst könne wir einen quadratische Form nach Definition in der Gestalt

$$Q(x) = \sum_{i \leq j} a_{ij} x^i x^j$$

schreiben. Hier ist über alle Paare von nicht-negativen ganzen Zahlen $(i, j)$ mit $i \leq j$ zu summieren, es ist $x = (x_1, \ldots, x_n)^t$, und die $a_{ij}$ sind die Koeffizienten von $Q$. Dann ist aber

$$Q(x) = x^t F x,$$

wenn man die $n \times n$ Matrix $F = (F_{ij})$ folgendermaßen erklärt:

$$F_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{falls } i = j \\ \frac{1}{2} a_{ij} & \text{falls } i < j \\ \frac{1}{2} a_{ji} & \text{falls } i > j \end{cases}.$$

Offenbar ist $F$ symmetrisch, und es ist auch die einzige symmetrische Matrix mit der Eigenschaft, daß $Q(x) = x^t Fx$ für alle $x$ gilt. Umgekehrt wird für jede symmetrische $n \times n$-Matrix $F$ vermöge $Q(x) := x^t Fx$ eine quadratische Form erklärt. Der eben angeführte Satz kann man daher in matrizielle Form übersetzen:

**Satz.** *Sei $F$ eine reelle, symmetrische $n \times n$-Matrix. Dann gibt es ein $A \in$ $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, sodaß*

$$F = A^t \begin{pmatrix} +1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & +1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} A$$

*Die Diagonalmatrix auf der rechten Seite ist eindeutig durch $F$ bestimmt.*

*Bemerkung.* In der linearen Algebra zeigt man, daß $A$ sogar als orthogonale Matrix (d.h. es gilt $A^t = A^{-1}$) gewählt werden kann.

*Beispiel.* Sei

$$F = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix},$$

und etwa $a > 0$, $D := b^2 - 4ac < 0$. Dann ist

$$(x, y)F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax^2 + bxy + cy^2 = \left(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}y\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{|D|}{4a}}y\right)^2,$$

und somit

$$F = \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 \\ \frac{b}{2\sqrt{a}} & \frac{\sqrt{|D|}}{2\sqrt{a}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{a} & \frac{b}{2\sqrt{a}} \\ 0 & \frac{\sqrt{|D|}}{2\sqrt{a}} \end{pmatrix}.$$

*Übung.* Gegeben sei eine quadratische Form $Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ in zwei Variablen. Man beweise:

1. $Q$ ist positiv definit genau dann, wenn $D := b^2 - 4ac < 0$ und $a > 0$.
2. $Q$ ist negativ definit genau dann, wenn $D := b^2 - 4ac < 0$ und $a < 0$.
3. $Q$ ist indefinit genau dann, wenn $D := b^2 - 4ac > 0$ .

Man kann den Begriff einer quadratischen Form auch abstrakter fassen, nämlich als symmetrischen Bilinerform auf einem Vektorraum $X$, d.h. als Element $B \in S^2(X, \mathbb{R})$. Ist nämlich $Q(x)$ eine quadratische Form in $n$ Variablen, so definiert

$$B(x, y) := Q(x + y) - Q(x) - Q(y)$$

ein Element $Q \in S^(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Dies sieht man sofort ein, indem man $Q(x)$ in matrizieller Form schreibt und die Distributivität der Matrix-Multiplikation ausnutzt. Ist umgekehrt ein $B \in S^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ gegeben, so ist

$$Q(x) := B(x, x)$$

eine quadratische Form in $n$ Variablen.

(In)definite Bilinearformen

Wegen dieses Zusammenhangs kann man leicht Begriffsbildungen und Sätze über quadratische Formen auf solche für Elemente von $S^2(X, \mathbb{R})$ übertragen, wo $X$ einen endlich dimensionalen reellen Vektorraum bezeichnet. So nennt man ein $B \in S^2(X, \mathbb{R})$ positiv definit, falls $B(x, x) > 0$ für alle $x \neq 0$ gilt, und entsprechend spricht man von negativ definiten, indefiniten etc. symmetrischen Bilinearformen. Insbesondere ist eine symmetrische positiv definite Bilinearform auf $X$ nicht anderes als ein Skalarprodukt.

## 4.5 Maxima und Minima

Wir erinnern an den Begriff des lokalen Maximums: Eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ (wo $U$ offene Teilmenge eines normierten Vektorraums ist) besitzt bei $a \in U$ ein lokales Maximum, falls es ein $r > 0$ gibt, sodaß $f(a) \geq f(x)$ für alle $x \in U_r(a)$ gilt.

Striktes Maximum

**Definition.** Ein lokales Maximum $a$ einer Funktion heißt *strikt*, wenn es eine $r > 0$ gibt, sodaß $f(a) > f(x)$ für $x \in U_r(a)$, $x \neq a$ gilt.

Kritischer Punkt

Entsprechend sind die Begriffe Minimum und lokales Minimum erklärt. Weite haben wir gesehen, daß eine differenzierbare Funktion höchstens dann einen lokalen Extremwert bei $a$ besitzt, falls $Df(a) = 0$ ist. Wir nennen solche Punkte, d.h. PPunkte $a$ aus dem Definitionsbereich einer differenzierbaren Funktion mit $DF(a) = 0$. *kritische* Punkte.

Im folgenden werden wir, wie im Fall einer reellen Veränderlichen mittels des Satzes von Taylor, ein hinreichendes Kriterium für die Bestimmung eine Extremwertes herleiten. Genauer beweisen wir

**Satz.** *Sei $U \subseteq X$ offen, sei $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ und $a \in U$. Es gelte $Df(a) = 0$. Dann gilt:*

1. *Ist $D^2 f(a)$ negativ (positiv) definit, so hat $f$ bei $a$ ein striktes lokales Maximum (Minimum).*

2. *Ist $D^2 f(a)$ indefinit, so liegt bei $a$ weder ein lokales Maximum, noch ein lokales Minimum vor.*

*Bemerkung.* Man beachte, daß im Satz nicht alle Fälle erfaßt sind. Ist nämlich $D^2 f(a)$ lediglich semi-definit (z.B. im einfachsten Fall $D^2 f(a) = 0$), so muß man höhere Ableitungen heranziehen, um das genaue Verhalten von $f$ bei $a$ zu studieren.

Affensattel

Einen kritischen Punkt $a$ mit $D^2 f(a)$ nennt man auch *Sattelpunkt* oder *Affensattel* (vgl. dazu die Graphen im Anhang und das nachstehende Beipiel).

*Beispiel.* Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 - y^2$. Dann ist $D^2 f(0) = 0$ und $D^2 f(0)((x, y)^t, (x, y)^t) = x^2 - y^2$ (Nachrechnen !). Also liegt bei 0 ein Sattelpunkt vor. In der Tat: Entlang der Geraden $x = 0$ verhält sich $f$ wie eine nach unten geöffnete Parabel. Dagegen gleicht sie entlang der dazu vertikalen Geraden $y = 0$ einer nach oben geöffneten Parabel. Ihr Graph über einer Umgebung von $x = y = 0$ gleicht daher einem Sattel.

Wir zerlegen den Beweis in zwei Lemmata.

**Lemma.** *Sei $U \subseteq X$ offen und $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$. Die Funktion $f$ habe ein lokales Maximum (bzw. Minimum) bei $a \in U$. Dann ist $D^2 f(a)$ negativ (positiv) semi-definit.*

*Beweis.* Indem wir $f$ ggfs. durch $-f$ ersetzen, können wir annehmen, daß bei $a$ ein lokales Maximum vorliegt. Dann gibt es also ein $\epsilon > 0$, so daß $f(a) \geq f(x)$ für alle $x \in U_\epsilon(a)$. Wir nehmen an, es gibt ein $h \in X$ mit $D^2 f(a)(h, h) > 0$, und führen dies zum Widerspruch. Wegen der Stetigkeit der Abbildung $D_h^2 f(x)$ (nach Voraussetzung ist $f$ ja zweimal stetig differenzierbar) und wegen $D^2 f(x)(h, h) = D_h^2 f(x)$, ist dann $D^2 f(x)(h, h) > 0$ für jedes $x$ aus einer geeigneten $\epsilon'$-Umgebung von $a$. Sei $\delta = \min(\epsilon, \epsilon')$. Ferner wählen wir ein $\sigma > 0$, sodaß $a + \sigma h \in U_\delta(a)$. Nach der Taylorschen Formel (und mit $Df(a)(\sigma h) = 0$) gilt dann

$$f(a + \sigma h) - f(a) = \frac{1}{2} \sigma^2 D^2 f(a + \vartheta \sigma h)(h, h) > 0$$

mit einem geeigneten $0 < \vartheta < 1$. Andererseits ist aber $f(a + \sigma h) \leq f(a)$. Ein Widerspruch. $\square$

**Lemma.** *Sei $f \in C^2(U, \mathbb{R})$ und $D^2 f(a)$ positiv (negativ) definit. Dann existiert ein $\epsilon > 0$, sodaß $D^2 f(x)$ für alle $x \in U_\epsilon(a)$ positiv (negativ) definit ist.*

*Beweis.* O.B.d.A. sei $D^2 f(a)$ positiv definit (sonst betrachte man $-f$ anstelle von $f$). Wegen der Äquivalenz der Normen auf einem endlich dimensionalen Vektorraum genügt es, die Behauptung mit einer uns beliebigen Norm auf $X$ zu zeigen. Wir wähle als Norm: $\|h\| := \sqrt{D^2 f(a)(h,h)}$. Dieses $\|h\|$ ist wohldefiniert, da $(x,y) \mapsto D^2 f(a)(x,y)$ ein positiv definites Skalarprodukt definiert. Der Leser überlege sich als leichte Übung den Beweis der Axiome (SP1)-(SP4). An dieser Stelle des Beweises benutzen wir die Varaussetzung, daß $D^2 f(a)$ positiv definit ist. Als Norm auf $S^2(X,\mathbb{R})$ wählen wir

$$\|\Phi\| = \sup\{|\Phi(x,y)| : x, y \in X,\ \|x\| = \|y\| = 1\}.$$

Nun ist $D^2 f : U \to S^2(X,\mathbb{R})$ nach Voraussetzung stetig. Insbesondere gibt es daher ein $\epsilon > 0$, sodaß für alle $x \in U_\epsilon(a)$ stets

$$\|D^2 f(a) - D^2 f(x)\| < \frac{1}{2},$$

also für $h \in X,\ h \neq 0$ die Ungleichung

$$|(D^2 f(a) - D^2 f(x))\left(\frac{h}{\|h\|}, \frac{h}{\|h\|}\right)| < \frac{1}{2}$$

gilt. Damit hat man dann für $x \in U_\epsilon(a)$, $h \in X$, $h \neq 0$ schließlich

$$D^2 f(x)\left(\frac{h}{\|h\|}, \frac{h}{\|h\|}\right) > D^2 f(a)\left(\frac{h}{\|h\|}, \frac{h}{\|h\|}\right) - \frac{1}{2} = \left\|\frac{h}{\|h\|}\right\|^2 - \frac{1}{2} = 1/2 > 0,$$

d.h. $D^2 f(x)(h,h) > 0$. □

*Beweis des Satzes.* Sei $D^2 f(a)$ negativ definit. Wir wählen ein $\epsilon > 0$ wie im Lemma. Ist dann $x \in U_\epsilon(a)$, so erhalten wir nach dem vorstehenden Lemma und mit dem Satz von Taylor für $h := x - a$

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2} D^2 f(a + \vartheta h)(h,h) < 0.$$

Also hat $f$ bei $a$ ein lokales Maximum. Entsprechend ergibt sich die zweite Behauptung über den positiv-definitem Fall.

Falls nun $D^2 f(a)$ indefinit ist, so liegt bei $a$ in der Tat weder ein lokales Maximum, noch ein lokales Minimum vor, denn hätte $f$ bei $a$ ein lokales Maximum oder aber ein lokales Minimum, es wäre $D^2 f(a)$ nach dem vorletzten Lemma semi-definit. □

Im Anhang sind die Graphen einiger Funktionen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jeweils in der Nähe eines kritischen Punktes dargestellt. Diese Beispiele lassen schon die Vielfalt von Erscheinungsformen erahnen, denen man gegenübersteht, wenn man das Verhalten von Funktionen in mehreren Variablen in der Umgebung von kritischen Punkten studiert und zu klassifizieren versucht.

# Kapitel 5

# Systeme differenzierbarer Gleichungen

## 5.1 Banachscher Fixpunktsatz

Ist $f : X \to X$ eine Abbildung eines metrischen Raumes in sich, so stellt sich in vielen Problemen die Frage nach Fixpunkten von $f$, d.h. den Punkten $x \in X$ mit

$$x = f(x).$$

Ein wichtiges und einfaches Kriterium für die Existenz von Fixpunkten ist der Banachsche Fixpunktsatz, den wir in diesem Abschnitt beweisen werden.

Zur Formulierung dieses Satzes zunächst an eine Definition:

Kontrahierende Abbildung

**Definition.** Sei $X$ ein vollständiger metrischer Raum (mit Metrik $d$). Eine Abbildung $f : X \to X$ heißt *kontrahierend*, falls es eine reelle Zahl $0 \leq h < 1$ gibt, sodaß gilt:

$$\forall x, y \in X : d(f(x), f(y)) \leq h \cdot d(x, y).$$

Die Zahl $h$ heißt dann *Kontraktionskonstante*.

*Bemerkung.* Offenbar ist eine kontrahierende Abbildung insbesondere stetig.

Banachscher Fixpunktsatz

**Satz.** *Sei $X$ sei ein vollständiger metrischer Raum und $f : X \to X$ eine kontrahierende Abbildung. Dann hat $f$ einen und nur einen Fixpunkt $x$. Für jeden beliebigen Punkt $x_0 \in X$ gilt $\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = x$, wobei $f^n$ die $n$-fache Komposition $f \circ f \circ \cdots \circ f$ bedeutet.*

*Beweis.* Eine kontrahierende Abbildung hat in der Tat höchstens einen Fixpunkt. Sind nämlich $f(x) = x$ und $f(y) = y$ zwei Fixpunkte, so gilt mit einem geeigneten $h < 1$

$$d(x,y) = d(f(x), f(y)) \leq h \cdot d(x,y) < d(x,y).$$

Es folgt $d(x,y) = 0$, d.h. $x = y$.

Zum Nachweis der Existenz und des Zusatzes sei $x_0 \in X$ beliebig gewählt. Wir setzen $x_n := f^n(x_0)$, also $x_n = f(x_{n-1})$ für alle $n \geq 1$. Nach Voraussetzung gibt es ein $h < 1$, sodaß $d(f(x), f(y)) \leq h \cdot d(x,y)$ für alle $x, y \in X$ gilt, d.h. mit den eben eingeführten Bezeichnungen ist

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq h \cdot d(x_n, x_{n-1}) \leq h^2 \cdot d(x_{n-1}, x_{n-2}) \leq \ldots \leq h^n d(x_1, x_0).$$

Es folgt

$$\sum_{n=0}^{\infty} d(x_{n+1}, x_n) \leq d(x_1, x_0) \sum_{n=1}^{\infty} h^n = d(x_1, x_0) \frac{1}{1-h}.$$

An dieser Stelle haben wir ausgenutzt, daß $h$ echt kleiner als 1 ist. Weiter gilt für $m > n$ nach der Dreiecksungleichung

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n) = s_m - s_n,$$

wo $s_n$ die $n$-te Partialsumme der Reihe $\sum_k d(x_k, x_{k-1})$ bedeutet. Da diese Reihe aber, wie eben eingesehen, konvergiert, ist $(s_n)$ eine Cauchy-Folge. Nach der letzten Ungleichung ist dann auch $(x_n)$ eine Cauchy-Folge (in $X$), und, da $X$ ja nach Voraussetzung vollständig ist, mithin konvergent.

Setze $x := \lim_{n\to\infty} x_n$. Da $f$ als kontrahierenden Abbildung stetig ist, können wir schließen:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x.$$

Wie behauptet ist $x$ somit Fixpunkt von $f$. □

*Beispiel.* Wir betrachten die Gleichung $\cos x = x$. Auf dem abgeschlossenen Intervall $[-1, +1]$ ist der Cosinus kontrahierend, denn mit dem Mittelwertsatz finden wir

$$\cos x - \cos y = -(x-y) \cdot sin\xi$$

für ein $\xi \in (-1, +1)$, jedenfalls $|sin\xi| < 1$. Da eine abgschlossene Teilmenge eines vollständigen metrischen Raumes wieder vollständig ist (Übungsaufgabe !), hat also nach dem Banachschen Fixpunktsatz $\cos x = x$ genau eine Lösung $-1 \leq x \leq +1$. Diese erhält man etwa als Limes der Folge $x_0 = 0$, $x_{n+1} = \cos x_n$.

*Übung.* Bestimmen Sie $n$ sodaß, in den Bezeichnungen des vorstehenden Beispiels $|x_n - x| < 1/10000$ ist.

## 5.2 Umkehrsatz

Wir erinnern zunächst an den Umkehrsatz aus der Anaysis I. Es sei $f$ eine auf dem offenen Intervall $U$ erklärte, stetig differenzierbare Funktion, und es gebe ein $a \in U$ mit $f'(a) \neq 0$. Wegen der Stetigkeit der Ableitung ist dann sogar $f'(x) \neq 0$ für $x$ aus einem geeigneten offenen Intervall $(a, b) \subseteq U$, welches $a$ enthält, und zwar kann $(a, n)$ so gewählt werden, daß entweder $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$ oder aber $f'(x) < 0$ für alle $x \in (a, b)$ gilt. Jedenfalls ist $f$ dann auf dem Intervall $(a, b)$ streng monoton. Das Intervall $(a, b)$ wird demnach bijektiv auf das Intervall $(u, v)$ abgebildet, wo $u$ und $v$ das Infimumm bzw, Supremum von $f$ auf $(a, b)$ bezeichnen (man wende den Zwischenwertsatz an; $u$ oder $v$ können auch gleich $\pm\infty$ sein). Die auf $(f(a), f(b))$ bzw. $(f(b), f(a))$ erklärte Umkehrfunktion ist ebenfalls stetig differenzierbar, und für ihre Ableitung gilt $(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$.

Diese Sachverhalt gilt im Wesentlichen auch für Abbildungen zwischen beliebigen nrmierten Vektorräumen.

Umkehrsatz

**Satz.** *Es seien $X$ und $Y$ endlich dimensionale normierte Vektorräume, $U$ eine offene Teilmenge von $X$ und $f \in \mathcal{C}^p(X, Y)$ für ein $p \geq 1$. Es sei $a \in U$ und $Df(a)$ bijektiv. Dann gibt es eine offene Umgebung $A \subseteq U$ von $a$, so daß $B := f(A) \subseteq Y$ offen und*

$$f|_A : A \to B$$

*bijektiv ist. Es gilt $f_{|A}^{-1} \in \mathcal{C}^p(B, X)$.*

lokal invertierbar

*Bemerkung.* Gibt es zu einem $a \in U$ eine offene Umgebung $A$ von $a$, sodaß $f|_A : A \to f(A)$ bijektiv und $f(A)$ offen ist, so sagt man $f$ sei *lokal bei a invertierbar bei a*.

Unter den Voraussetzungen des Satzes hat man für die Ableitung von $f_{|A}^{-1}$ die Formel

$$D(f_{|A}^{-1})(y) = (Df(x))^{-1},$$

wenn $y = f(x)$, $x \in A$, $y \in B$ ist. Insbesondere ist also $Df(x)$ also für jedes $x \in A$ invertierbar. Dies erhält man leicht durch Anwendung der Kettenregel auf

$$\mathrm{id} = f_{|A}^{-1} \circ f_{|A}.$$

*Beweis.* Wir unterteilen den Beweis in mehrere Schritte. Ferner nehmen wir zunächst an, daß

$$X = Y, \quad f(a) = a = 0, \quad f'(0) = \mathrm{id}\,.$$

(Wir schreiben im Folgenden aber trotzdem gelegentlich $Y$ statt $X$ wenn wir hervorheben wollen, daß es sich um den Bildraum von $f$ handelt. Ferner benutzen wir in den folgenden Betrachtungen gelegentlich $f^{(r)}$ für $D^r f$, da hierdurch verschiedene Formeln lesbarer werden.)

Wir haben im Wesentlichen zu gegebenem $y \in Y$ die Lösungen $x \in U$ der Gleichung $y = f(x)$ zu studieren. Dies können wir auf ein Fixpunktproblem zurückführen, indem wir die Funktion

$$g_y : U \to X, \ g_y(x) := y + x - f(x)$$

einführen. Es ist nämlich

$$y = f(x) \Longleftrightarrow x = g_y(x).$$

Offenbar ist auch $g_y \in \mathcal{C}^p(U, Y)$, und es gilt $Dg_y(0) = 0$.

**Lemma (1).** *Es gibt eine offene Umgebung $U_r(0) \subseteq U$ von $0$ ($r > 0$), sodaß für jedes $y \in Y$ gilt*

$$\forall x \in \overline{U_r(0)} \ \forall h \in X : \|g_y'(x)(h)\| \leq \frac{1}{2}\|h\|.$$

*(Hier und im Folgenden bezeichnet $\|\cdot\|$ die Normen auf $X$ und $Y$, und $U_r(0)$ etc. sind bezüglich dieser Normen gemeint.)*

*Beweis.* Wir benutzen die Norm

$$\|A\| = \sup\{\|Ah\| : h \in X, \ \|h\| = 1\} \qquad (A \in \mathrm{Hom}(X, Y))$$

Die Bedingung $\|Dg_y(x)(h)\| \leq \frac{1}{2}\|h\|$ ist dann äquivalent zu $\|Dg_y(x)\| \leq \frac{1}{2}$. Da $Dg_y : U \to \mathrm{Hom}(X, X)$ nach Voraussetzung stetig ist und $Dg_y(0) = 0$ gilt, gibt es tatsächlich ein $r > 0$, sodaß für $x \in U_r(0)$ die Ungleichung $\|Dg_y(x)\| < \frac{1}{2}$ gilt. □

**Lemma (2).** *Es sei $y \in \overline{U_{\frac{r}{2}}(0)}$. Dann ist $g_y\left(\overline{U_r(0)}\right) \subset \overline{U_r(0)}$. Die Einschränkung*

$$g_y|_{\overline{U_r(0)}} : \overline{U_r(0)} \to \overline{U_r(0)}$$

*ist kontrahierend mit Kontraktionskonstante $\frac{1}{2}$.*

*Beweis.* Entwickeln wir $g_y(x)$ nach der Taylorformel, so erhalten wir

$$g_y(x) = y + Dg_y(\vartheta x)(x)$$

mit einem $0 < \vartheta < 1$. Es ist damit für $\|x\| \leq r$ und $\|y\| \leq r/2$ und nach dem vorangehenden Lemma

$$\|g_y(x)\| \leq \|y\| + \|g_y'(\vartheta x)(x)\| \leq \|y\| + \|g_y'(\vartheta x)\| \cdot \|x\| \leq \|y\| + \frac{1}{2}\|x\| \leq r.$$

Die Abbildung $g_y$ ist kontrahierend auf $\overline{U_r(0)}$. Seien nämlich $x_1, x_2 \in \overline{U_r(0)}$, dann gilt mit einem geeigneten $0 < \vartheta < 1$ die Gleichung

$$g_y(x_2) = g_y(x_1) + Dg_y(x_1 + \vartheta(x_2 - x_1))(x_2 - x_1)$$

Also

$$\begin{aligned}\|g_y(x_2) - g_y(x_1)\| &= \|Dg_y(x_1 + \vartheta(x_2 - x_1))(x_2 - x_1)\| \\ &\leq \|Dg_y(x_1 + \vartheta(x_2 - x_1)\| \cdot \|x_2 - x_1\| \leq \frac{\|x_2 - x_1\|}{2}\end{aligned}$$

Letzteres folgt wegen $x_1 + \vartheta(x_2 - x_1) \in \overline{U_r(0)}$. □

**Lemma (3).** *Zu jedem $y$ mit $|y| \leq r/2$ gibt es ein und nur ein $x \in \overline{U_r(0)}$, sodaß $y = f(x)$. Insbesondere ist die Einschränkung*

$$f_{|A} : A := \overline{U_r(0)} \cap f^{-1}(U_{\frac{r}{2}}(0)) \to U_{\frac{r}{2}}(0)$$

*bijektiv.*

*Beweis.* Nach dem vorangehenden Lemma können wir den Banachschen Fixpunktsatz auf

$$g_y|\overline{U_r(0)} : \overline{U_r(0)} \to \overline{U_r(0)}$$

anwenden. Man beachte, daß die Bedingung der Vollständigkeit aus dem Banachschen Fixpunktsatz erfüllt ist, da $\overline{U_r(0)}$ als abgeschlossene Teilmenge des Banachraums $X$ vollständig ist. Also gibt es genau ein $x \in \overline{U_r(0)}$ mit $g_y(x) = x$, d.h. $f(x) = y$. □

**Lemma (4).** *Es sei $B := U_{r/2}(0)$. Dann ist $A := f^{-1}(B) \cap \overline{U_r(0)}$ offen in $X$, und die Einschränkung $f_{|A} : A \to B$ ist bijektiv.*

*Beweis.* Nach dem vorangehenden Lemma ist die Einschränkung bijektiv. Zum Nachweis der Offenheit von $A$ genügt es zu zeigen, daß

$$A := f^{-1}(B) \cap U_r(0)$$

gilt, denn es ist ja $f^{-1}(B)$ wegen der Stetigkeit von $f$ und der Offenheit von $B = U_{r/2}(0)$ offen, und der Schnitt offener Mengen ist wieder offen.

Sei also $b \in B$, und dazu $a \in \overline{U_r(0)}$ mit $b = f(a)$. Da $b$ innerer Punkt von $B$ ist, gibt es ein $0 < s < r$ mit $b \in U_{s/2}(0)$. Nach Lemma 3, jetzt aber angewandt auf $s$ statt auf $r$, gibt es ein $a' \in \overline{U_s(0)}$ mit $b = f(a')$. Da $\overline{U_s(0)} \subseteq U_r(0)$ und wegen der Eindeutigkeit von $a$ muß $a = a'$ gelten. Mithin ist $a \in U_r(0)$, und das war zu zeigen. □

**Lemma (5).** *Für $y_1, y_2 \in B$ gilt*

$$\|f_{|A}^{-1}(y_1) - f_{|A}^{-1}(y_2)\| \leq 2\,\|y_1 - y_2\|.$$

*Insbesondere ist $f_{|A}^{-1} : B \to A$ stetig.*

*Beweis.* Seien $y_1, y_2 \in B$, und seien dazu $x_2, x_2 \in A$ mit $y_i = f(x_i)$ für $i = 1, 2$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\|x_1 - x_2\| - \|f(x_1) - f(x_2)\| &\leq \|x_1 - f(x_1) + x_2 - f(x_2)\| \\ &= \|g_0(x_1) - g_0(x_2)\| \leq \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|,\end{aligned}$$

die letzte Ungleichung wegen Lemma 2. Damit folgt

$$\|x_1 - x_2\| \leq 2\,\|f(x_1) - f(x_2)\|,$$

und indem man $x_i = f_{|A}^{-1}(y_i)$ setzt, erhält man die behauptete Ungleichung. □

**Lemma (6).** *$f_{|A}^{-1}$ ist differenzierbar und für $b = f(a)$ mit $b \in B$, $a \in A$ ist $Df(a)$ invertierbar und es gilt $D(f_{|A}^{-1})(b) = f'(a)^{-1}$.*

*Beweis.* Zunächst stellen wir fest, daß $Df(a)$ für $a \in A$ tatsächlich invertierbar ist. Zunächst ist jedenfalls $|a| \leq r$, nach dem ersten Lemma also $\|Dg_0(a)\| \leq 1/2$; es ist aber $Dg_y(a) = \mathrm{id} - Df(a)$. Ist daher $Df(a)(h) = 0$, so folgt $\|h\| = \|(\mathrm{id} - Df(a))(h)| \leq \frac{1}{2}|h|$, also $h = 0$. Somit ist $f'(a)$ injektiv, also - als Endomorphismus von $X$ - auch bijektiv.

Zu $b \in B$ und $a \in A$ wie im Lemma betrachten nun den Differenzenquotienten

$$\Delta := \frac{f_{|A}^{-1}(y) - f_{|A}^{-1}(b) - f'(x)^{-1}(y - b)}{\|y - b\|}.$$

Schreiben wir $y = f(x)$ mit $x \in A$, so haben wir

$$\Delta = \frac{x - a - f'(a)^{-1}(f(x) - f(a)}{\|y - b\|} = \frac{f'(a)^{-1}\,[f'(a)(x - a) - f(x) + f(a)]}{\|y - b\|}$$

Damit folgt

$$\|\Delta\| \leq 2\|f'(a)^{-1}\| \cdot \frac{\|f'(a)(x - a) - f(x) + f(a)\|}{\|x - a\|},$$

wobei wir bei der letzten Ungleichung für den Nenner noch benutzt haben, daß nach Lemma 6 ja $|x - a| \leq 2|y - b|$ ist. Strebt nun $y$ gegen $b$, so strebt wegen der Stetigkeit von $f_{|A}^{-1}$ (oder wegen der letzten Ungleichung) auch $x$ gegen $a$, und, da $f$ ja differenzierbar ist, die rechte Seite der Ungleichung für $\|\Delta\|$ gegen 0. □

**Lemma (7).** $f^{-1} \in C^p(B, X)$

*Beweis.* Für $p = 1$ folgt dies sofort aus dem vorangehenden Lemma, wonach ja $f_{|A}^{-1}$ differenzierbar ist. Die Stetigkeit von $D(f_{|A}^{-1})$ folgt dabei aus der Formel

$$D(f_{|A}^{-1}) = \mathrm{inv} \circ f' \circ f_{|A}^{-1}$$

und der Stetigkeit von $f'$, $f_{|A}^{-1}$ und inv. Hierbei ist inv die Abbildung

$$\mathrm{inv} : \mathrm{GL}(X) \to \mathrm{GL}(X), \qquad A \mapsto A^{-1}.$$

Die letzte Formel impliziert aber auch (unter Benutzung der Kettenregel): Ist $f_{|A}^{-1}$ vom Typ $\mathcal{C}^r$ und $r < p$, so ist es auch $r+1$-mal stetig differenzierbar. Denn es ist ja inv vom Typ $\mathcal{C}^\infty$ (wir lassen dies als Übungsaufgabe) und $f'$ ist nach Voraussetzung vom Typ $\mathcal{C}^{p-1}$. Daher folgt das Lemma durch Induktion über $r$. □

Wir beweisen nun den allgemeinen Fall durch Rückführung auf den soeben behandelten Spezialfall. Hierzu betrachten wir

$$h := \alpha^{-1} \circ t_{-b} \circ f \circ t_a : V := -a + U \to X,$$

wo $t_u$ für $u$ aus einen Vektorraum $Z$ die Translation $t_u : Z \mapsto Z$,um $u$ bedeutet, d.h. $t_u(z) = z + u$, und wo $\alpha := f'(a)$. Man beachte, daß $\alpha$ nach Voraussetzung bijektiv ist, also $\alpha^{-1}$ erklärt ist.

Nun sind die affinen Abbildunen $t_u$ und $\alpha^{-1}$ unendlich oft differenzierbar mit Ableitungen $T_u'(z) = \mathrm{id}$ und $D(\alpha^{-1})(y) = \alpha^{-1}$, und die Menge $V$ ist offen. Mit $f$ ist dann auch $h$ vom Typ $\mathcal{C}^p$. Man rechnet weiter sofort nach, daß $h(0) = 0$, und daß $h'(0) = \mathrm{id}$. In der Tat ist ja

$$h'(0) = D(\alpha^{-1})(\dots) \circ Dt_b(\dots) \circ f'(t_a(0)) \circ Dt_a(0) = \mathrm{id} \circ \alpha^{-1} \circ f'(0) \circ \mathrm{id} = \mathrm{id}\,.$$

Wir können daher schließen, daß $h$ bei 0 lokal invertierbar ist, mit lokaler Umkehrabbildung vom Typ $\mathcal{C}^p$. Indem wir dann

$$f = t_b \circ \alpha \circ h \circ t_{-a}$$

schreiben, sehen wir leicht, daß $f$ bei $a$ lokal invertier bar ist und die lokale Umkehrabbildung tatsächlich $p$-mal differenzierbar ist. Die Dateils hierzu lassen wir als Übungsaufgabe. □

Es ist bemerkenswert, daß der Beweis des Umkehrsatzes uns sogar eine Verfahren an die Hand, eine Gleichung $y = f(x)$ mit einer stetig differenzierbaren Funktion $f$ explizit nach $x$ aufzulösen. Wir notieren dies hier noch einmal.

**Korollar (zum Beweis des Umkehrsatzes).** *Es sei $X$ ein endlich dimensionaler normierter Vektorraum, $U \subseteq X$ offen, $f \in C^1(U,X)$ und $a \in U$. Es sei $Df(a) = \mathrm{id}$. Dann existiert eine offene Umgebung $A$ von $a$ und ein $r > 0$ mit $A \subseteq \overline{U_r(a)} \subseteq U$, sodaß gilt:*

1. *$f$ ist injektiv auf $A$.*
2. *Ist $y \in f(A)$, so wird durch $g_y(x) = y + x - f(x)$ eine kontrahierende Selbstabbildung von $\overline{U_r(a)}$ erklärt.*
3. *Für jeden Startwert $x_0 \in \overline{U_r(a)}$ konvergiert die Folge $(g_y^n(x_0))_n$ gegen die (eindeutige) Lösung $x \in A$ von $y = f(x)$.*

*Bemerkung.* Streng genommen zeigt der Beweis des Umkehrsatzes das Korollar zunächst nur für den Fall $a = 0$ und $f(a) = 0$. In der Tat ergibt eine Durchsicht des Beweises aber, daß diese Voraussetzung überflüßig ist. (Wir haben sie nur zur Vereinfachung der Notation gemacht). Man kann sich überlegen, daß das Korollar sogar richtig bleibt, wenn $f'(a)$ "nah" genug bei id liegt; wir wollen dies hier aber nicht präzisieren.

*Beispiel.* Wir wenden das Korollar zum Umkehrsatzes an, um $\log 2$ (als Lösung der Gleichung $2 = \exp(x)$) zu berchnen. Wir betrachten also das Korollar für den Spezialfall

$$f(x) = \exp(x), \quad a = 0.$$

Man beachte, daß die im Korollar geforderte Voraussetzung $f'(0) = 1$ erfüllt ist. Nach dem Korollar können wir also erwarten, daß die Folge $x_n$ mit

$$x_n = y + x_{n-1} - \exp(x_{n-1})$$

gegen $\log(y)$ konvergiert, wenn nur $y$ nahe genug bei $1 = \exp(a)$ und der Startwert $x_0$ nahe genug bei $a = 0$ (am besten natürlich schon nahe bei $\log y$) gewählt ist.

Hierzu schreibt man sich leicht ein kleines Programm (hier z.B. für Pari/GP):

```
sety( b) =
{
  y = b;
}

g(x) =
{
  return( y + x - exp(x));
}
```

und ruft es in der folgenden Gestalt auf:

? sety( 1/2); x=.7; for( n=1; 20; x=g(x); print( x))

Die folgende Tabellen gibt die ersten Folgenglieder der Folge der Iterierten $x_n$ im Fall $y = 1/2$, $x_0 = -0.7$ an.

| $n$ | $x_n$ | $n$ | $x_n$ |
|---|---|---|---|
| 0 | $-0.70000000$ | 11 | $-0.69315055$ |
| 1 | $-0.69658530$ | 12 | $-0.69314886$ |
| 2 | $-0.69486919$ | 13 | $-0.69314802$ |
| 3 | $-0.69400893$ | 14 | $-0.69314760$ |
| 4 | $-0.69357824$ | 15 | $-0.69314739$ |
| 5 | $-0.69336275$ | 16 | $-0.69314728$ |
| 6 | $-0.69325498$ | 17 | $-0.69314723$ |
| 7 | $-0.69320108$ | 18 | $-0.69314720$ |
| 8 | $-0.69317413$ | 19 | $-0.69314719$ |
| 9 | $-0.69316065$ | 20 | $-0.69314718$ |
| 10 | $-0.69315392$ | | |

Berechnung von $\log 2 = 0.69314718\ldots$ durch Iteration

*Übung.* Wir betrachten ein *komplexes Polynom*, d.h. eine Abbildung der Gestalt

Komplexe Polynome als $\mathcal{C}^\infty$-Abbildungen

$$p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0,$$

wo $n$ eine fest vorgebene natürliche Zahl und die $a_j$ fest vorgegebene komplexe Zahlen sind.

Wir haben hier einen Spezialfall unserer Theorie, dennn $\mathbf{C}$ ist ein zweidimensionaler euklidischer Vektorraum. Als Basis (des reellen Vektorraums $\mathbb{C}$) kann man etwa $1, i$ wählen. Das Skalarprodukt ist durch

$$\langle z, w \rangle = \frac{\bar{z}w + z\bar{w}}{2}$$

gegeben, die dadurch induzierte Norm ist der gewöhnliche Absolutbetrag komplexer Zahlen $|z| = \langle z, z \rangle = z \cdot \overline{z} = \sqrt{x^2 + y^2}$, wo $z = x + iy$.

Man zeige: Es ist $p$ differenzierbar, und es gilt die Formel $Dp(a)(h) = \frac{dp}{dz}(a) \cdot h$, wo $\frac{dp}{dz}$ das durch

$$\frac{dp}{dz}(z) := \sum_{l=1}^{n} a_l \, l z^{l-1}.$$

definierte Polynom ist. (Hinweis: man zeige dies zunächst für $p(z) = z^l$.)

Man folgere: Es ist $p \in C^\infty(\mathbf{C}, \mathbf{C})$. Die Abbildung $p$ ist lokal invertierbar genau dann, wenn $\frac{dp}{dz}(a) \neq 0$.

Wir sehen also, daß $p$ in jedem Punkt mit Ausnahme der endlich vielen Nullstellen des Polynoms $\frac{dp}{dz}$ lokal invertierbar ist, d.h. die Gleichung $w = p(z)$ lokal nach $z$ eindeutig aufgelöst werden kann. Es ist interessant die so erhaltenen Umkehrfunktionen zu studieren. Dies führt in die Theorie der Riemannschen Flächen, eine der schönsten und reichhaltigsten Theorien der Mathematik.

*Beispiel.* Es sei $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ mit $f(z) = -z^2 + z$, dann ist $f(0) = 0$ und $Df(0) = \mathrm{id}$ (siehe oben). Setzen wir $g_c(z) := c + z - f(z)$, so ist also

$$g_c(z) = z^2 + c.$$

Nach dem Korollar zum Umkehrsatz strebt die Folge $(g_c^n(z_0))$, also die Folge

$$z_0, z_0^2 + c, \left(z_0^2 + c\right)^2 + c, \ldots$$

gegen eine Lösung $z$ von $f(z) = c$, d.h. $z^2 - z + c = 0$, wenn nur für $c \approx 0$ und $z_0 \approx 0$ gewäht sind.

Es stellen sich ganz natürlich zwei Fragen:

1. Was kann man bei festem $c$ über $\left(g_c^n(z_0)\right)_{n\in\mathbf{N}}$ in Abhängigkeit von $z_0$ aussagen?

2. Was kann man bei fest gehaltenem Startwert $z_0$ über $\left(g_c^n(0)\right)_{n\in\mathbf{N}}$ in Abhängigkeit von $c$ aussagen?

Julia-Menge

Zur Frage 1: Für $c = 0$ erhalten wir z.B. die Folge $z_0, z_0^2, z_0^4, \ldots, z_0^{2^n}, \ldots$, die gegen Null konvergiert, falls $|z_0| < 1$ ist, für $|z_0| > 1$ dem Betrage nach unbeschränkt wächst, und deren Glieder für $|z_0| = 1$ alle in der Einheitssphäre $\mathbf{S}^1$ liegen. Eine solche Menge wie hier $\mathbf{S}^1$ nennt man in dieser und in ähnlichen Situationen eine *Julia-Menge*. Sie bildet eine Art „Grenzlinie“ zwischen den Anfangswerten, für die die Iterationenfolge konvergiert (Uebungsaufgabe: wogegen denn ?) und jenen, für die sie unbeschränkt ist. Sie kann sehr komplizierte Formen annehmen. Dem Studium solcher Objekte widmeten sich in den 20er-Jahren die Mathematiker Julia und Fatou. Man kann sich überlegen, daß zu jedem $c \in \mathbf{C}$ ein $R$ existiert, so daß für $|z_0| > R$ die Folge $(g_c^n(z_0))$ gegen $\infty$ strebt (d.h. genauer: dem Betrage nach unbeschränkt wächst). Somit sind die Julia-Mengen zu den verschiedenen $c$ jedenfalls beschränkt. Man kann sehr leicht Approximationen solcher Mengen zeichnen (und es gibt eine Unmenge von Programmen z.B. im Internet, die dies für einen tun - aber selbstverständlich liegt der Spaß darin, selbst so ein Programm zu entwerfen !!!)

Mandelbrot-Menge

Zu Frage 2: Die Menge $M$ aller $c \in \mathbf{C}$, für die $(g_c^n(0))$ beschränkt ist, wurde nach dem Mathematiker Mandelbrot benannt. Gelegentlich wird sie auch als Apfelmännchen bezeichnet, was sich aus dem Bild der Mandelbrot-Menge am Ende des Kapitels selbst erklärt.

Die Mandelbrot-Menge — genauer, eine Approximation der Mandelbrotmenge — läßt sich sehr einfach zeichnen: Es sei

$$M_{K,N} = \{c \in \mathbf{C} : |g_c^n(0)| < K \text{ für } 0 \leq n \leq N\},$$

wobei $K, N$ fest zu wählende positive Zahlen sind und — wie obe — $g_c(z) = z^2 + c$. Offenbar kann man $M_{K,N}$ bei geeignet gewählten $N, K$ als Approximation der Mandelbrot-Menge ansehen. Um $M_{K,N}$ auf einem Computer-Bildschirm erscheinen zu lassen, der etwa $a \times b$ Pixel zeigen kann ($a$ horizontal, $b$ vertikal), färbt man einem Pixel mit Koordinaten $(h, k)$ $(1 \leq h \leq a$, $1 \leq k \leq b)$ schwarz, falls

$$|c|, |f_c(0)|, |f_c(f_c(0))|, \ldots, |f_c^N(0)| < K$$

gilt, wo

$$c = c_{h,k} = (-2.25 + \frac{3h}{a}) + i(-1.5 + \frac{3k}{b})$$

ist. Andernfalls läßt man den Pixel weiß. Die Konstanten $K, N$ bestimmt man am besten experimentell, d.h. man probiert den beschriebenen Algorithmus für verschiedene $K, N$ aus.

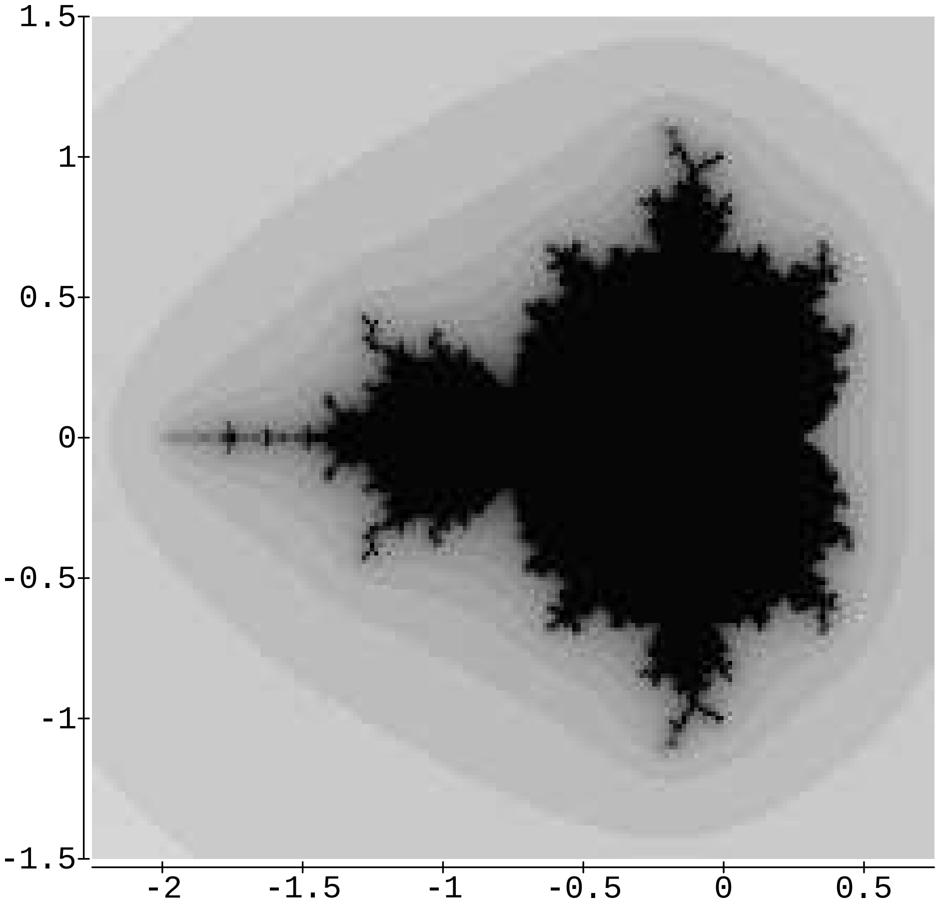
Noch schönere Ergebnisse erzielt man, falls man einen farbigen Bildschirm benutzt, oder einen, der verschiedene Grauwerte anzeigen kann; dann kann man die Geschwindigkeit $v(c)$, mit der der Punkt 0 unter $g_c$ gegen unendlich geht, durch verschiedene Farben oder Grauwerte wiedergeben. Genauer setzt man $v(c) = N + 1$, falls $c \in M_{K,N}$, und andernfalls $v(c) =$ kleinstes $n \leq N$, sodaß $|f_c^n(0)| \geq K$. Der Pixel $(h, k)$ erhält dann den Farb (oder Grau)-wert $v(c_{h,k})$. Genauso ist die unten gegebene Abbildung erstellt worden. Dabei wurde $a = b = 200$ und $K = N = 20$ gewählt. Nachstehend haben wir als Beispiel ein Programm in Pari/GP angefügt.

```
/**********************************************************
*
* PARI/GP-Skript zum Zeichnen von Mandelbrot- und Julia-Mengen
*
**********************************************************/

UR_X=250; UR_Y=250; SCALE = 100;
/* Der Ursprung der komplexen Ebene und ein Skalierungsfaktor*/

position( z) =
/* Gibt die Pixelkoordinaten als Vektor der komplexen Zahl z zurueck */
{
```

```
  return( round( [ UR_X + SCALE*real( z), UR_Y - SCALE*imag(z) ]));
}

Mandelbrot( x0) =
/*  Zeichnet die Menge M = { c : (x_n) beschraenkt },
    wobei (x_n) die Folge mit
    x_0 = x0, x_{n+1} = x_n^2 + c
    bezeichnet.
*/
{
  local( t);

  ANZ_SCHRITTE = 20; SCHRANKE = 1.5;
  plotinit(1, 500, 500);
  forstep( cx = -1.5, 1.5, .01,
    forstep( cy = -1.5, 1.5, .01,
      c = cx+I*cy;
      xn = x0; for( n=0, ANZ_SCHRITTE, xn = xn^2 + c);
      if( (t=abs(xn)) < SCHRANKE,
        plotcolor( 1, 1 + floor( 7*t/SCHRANKE) );
        plotpoints( 1, position( c)[1], position( c)[2])
      );
    )
  );
  plotdraw( [1,0,0]);
}

Julia( c) =
/*  Zeichnet die Menge J_c =  x0 : (x_n) beschraenkt ,
    wobei (x_n) die Folge mit
    x_0 = x0, x_{n+1} = x_n^2 + c
    bezeichnet. Fuer c=.28, .3 bekomt man vernuenftige Resultate.
*/
{
  local(t );

  ANZ_SCHRITTE = 20; SCHRANKE = 2;
  plotkill(1); plotinit(1, 500, 500);

  forstep( x0_x = -1.5, 1.5, .01,
    forstep( x0_y = -1.5, 1.5, .01,
      x0 = x0_x + I*x0_y;
      xn = x0; for( n=0, ANZ_SCHRITTE, xn = xn^2 + c);
      if( ( t=abs(xn)) < SCHRANKE,
```

```
        plotcolor( 1, 1 + floor( 7*t/SCHRANKE) );
        plotpoints( 1, position( x0)[1], position( x0)[2])
      );
    )
  );
  plotdraw( [1,0,0]);
}
```

Das Skript (nennen wir es *Julia_Mandelbrot.gp*) kann dann folgendermaßen benutzt werden:
? read( "Julia_Mandelbrot.gp")
? Mandelbrot(0)
? Julia(.28+.01*I)




Das „Apfelmännchen“

*Beispiel.* Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x + \mathrm{e}^y \\ y + \mathrm{e}^z \\ z + \mathrm{e}^x \end{pmatrix}$$

$f$ ist an jeder Stelle $x_0 = (a,b,c)^t \in \mathbb{R}^3$ lokal invertierbar. Dies ist überhaupt nicht offensichtlich, ist aber eine Folge des Umkehrsatzes: die Determinante der Jacobimatrix ist

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{e}^b & 0 \\ 0 & 1 & \mathrm{e}^c \\ \mathrm{e}^a & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 + \mathrm{e}^{a+b+c},$$

somit verschieden von Null, d.h. $Df(x_0)$ bijektiv.

Die Funktion $f$ ist allerdings nicht nur in jedem Punkt lokal invertierbar, sondern sie definiert sogar global eine bijektive Abbildung des $\mathbb{R}^3$ auf sich selbst (vgl. Übungsaufgaben). Wir wollen mittels des im Korollar zum Umkehrsatz beschriebenen Iterationsverfahrens $f^{-1}(0)$ berechnen. Als erste Approximation wählen wir $x_0 = -(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^t$. Das Iterationsverfahren lautet

$$x_{n+1} = g(x_n) := x_n - f(x_n) = -(\exp(x_{n,2}), \exp(x_{n,3}), \exp(x_{n,1}))^t,$$
$$(x_n = (x_{n,1}, x_{n,2}, x_{n,3})^t).$$

Man beachte, daß die Voraussetzung des Korollars $f'(a) = \mathrm{id}$ nicht erfüllt ist: für keinen Wert $x$ stimmt die Jacobimatrix zu $f'(x)$ mit der Einheitsmatrix überein. Dennoch konvergiert das Iterationsverfahren.

| $n$ | $-x_n$ | $g(x_n)$ |
|---|---|---|
| 0 | $-[-1/2, -1/2, -1/2]$ | $[0.1065, 0.1065, 0.1065]$ |
| 1 | $-[0.6065, 0.6065, 0.6065]$ | $-[0.06129, 0.06129, 0.06129]$ |
| 2 | $-[0.5452, 0.5452, 0.5452]$ | $[0.03446, 0.03446, 0.03446]$ |
| 3 | $-[0.5797, 0.5797, 0.5797]$ | $-[0.01963, 0.01963, 0.01963]$ |
| 4 | $-[0.5600, 0.5600, 0.5600]$ | $[0.01110, 0.01110, 0.01110]$ |
| 5 | $-[0.5711, 0.5711, 0.5711]$ | $-[0.006309, 0.006309, 0.006309]$ |
| 6 | $-[0.5648, 0.5648, 0.5648]$ | $[0.003575, 0.003575, 0.003575]$ |
| 7 | $-[0.5684, 0.5684, 0.5684]$ | $-[0.002028, 0.002028, 0.002028]$ |
| 8 | $-[0.5664, 0.5664, 0.5664]$ | $[0.001150, 0.001150, 0.001150]$ |
| 9 | $-[0.5675, 0.5675, 0.5675]$ | $-[0.0006524, 0.0006524, 0.0006524]$ |
| 10 | $-[0.5669, 0.5669, 0.5669]$ | $[0.0003699, 0.0003699, 0.0003699]$ |
| 11 | $-[0.5672, 0.5672, 0.5672]$ | $-[0.0002098, 0.0002098, 0.0002098]$ |
| 12 | $-[0.5670, 0.5670, 0.5670]$ | $[0.0001190, 0.0001190, 0.0001190]$ |
| 13 | $-[0.5672, 0.5672, 0.5672]$ | $-[0.00006749, 0.00006749, 0.00006749]$ |
| 14 | $-[0.5671, 0.5671, 0.5671]$ | $[0.00003828, 0.00003828, 0.00003828]$ |

Berechnung von $f^{-1}(0)$ für $f(x,y,z) = [x + \exp(y), y + \exp(z), z + \exp(x)]$.

## 5.3 Implizite Funktionen

Gegeben sei eine Funktion $f$ in zwei Veränderlichen. Wir betrachten die Punkte $(x, y)$ mit $f(x, y) = 0$. Wir erwarten, daß die so erklärte Punktmenge eine Kurve beschreibt, d.h. (wenigstens stückweise) als Graph einer Funktion einer Veränderlichen beschrieben werden kann. Es stellt sich also die Frage, ob es eine Funktion $h$ gibt, so daß $f(x, y) = 0$ gleichbedeutend mit $y = h(x)$ ist. Anders gesagt: wir versuchen die Gleichung $f(x, y) = 0$ nach $y$ aufzulösen. Die Funktion $h$ nennt man dann *implizit durch $f$ definiert*.

*Beispiel.* Es sei $f(x, y) = ax + by + c$. Ist $b \neq 0$, so hat man $y = (-ax - c)/b$. Wir finden hier also $h(x) = (-ax - c)/b$. Man beachte, daß die Bedingung $b \neq 0$ auch als $f_y(x, y) \neq 0$ ausgedrückt werden kann.

Natürlich kann man nicht erwarten, daß man eine Gleichung $f(x, y) = 0$ global nach $y$ auflösen kann (der Leser überlege sich hierzu ein Beispiel). Es gilt aber immerhin allgemein das folgende lokale Analogon zum angeführten Beispiel.

Implizite Funktion im Fall zweier Veränderlicher

**Satz.** *Sei $U$ eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^2$, sei $f \in \mathcal{C}^p(U, \mathbb{R})$ für ein $p \geq 1$ und $(a, b) \in U$. Es gelte $f(a, b) = 0$ und $f_y(a, b) \neq 0$. Dann gibt es eine offene Umgebung $A \subset U$ von $(a, b)$, eine offene Umgebung $B_1 \subset \mathbb{R}$ von $a$ und eine Funktion $h \in \mathcal{C}^p(B_1, \mathbb{R})$, sodaß gilt:*

1. *Für alle $(x, y) \in A$ ist $f(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x \in B_1$ und $y = h(x)$.*
2. *Für alle $(x, y) \in A$ mit $f(x, y) = 0$ gilt $f_y(x, y) \neq 0$, und für alle $x \in B_1$ ist*
$$h'(x) = -\frac{f_x(x, h(x))}{f_y(x, h(x))}.$$

*Bemerkung.* Man beachte, daß die funktion $h$ durch die Bedingung 1. offebar eindeutig bestimmt ist. Die Bedingung 2. liefert dann sofort noch eine Differentialgleichung für $h$.

*Bemerkung.* Die Gleichung für $h'(x)$ kann man auch in der Form
$$\operatorname{grad} f(x, h(x)) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ h'(x) \end{pmatrix} = 0$$
schreiben. Sie besagt also, daß $\operatorname{grad} f(x, h(x))$ senkrecht auf $v := (1, h'(x))^t$ steht. Nun ist $v$ aber gerade die Richtung der Tangente an den Graphen von $h$, d.h. an die *Kurve* $f(x, y) = 0$ (im Punkt $(x, h(x))$). Die Bedingung, daß die zweite Komponente von $\operatorname{grad} f(a, b)$ nicht verschwindet, besagt, daß dieser Vektor nicht parallel zur $x$-Achse ist. Da er senkrecht auf $v$ steht, bedeutet letzteres, daß $v$ nicht parallel zur $y$-Achse sein darf. In der Tat

würden wir auch nicht erwarten, $y$ in der der Gleichung $f(x,y)=0$ in der Nähe von $(a,b)$ als Funktion von $x$ schreiben zu können, wenn die Kurve $f(x,y)=0$ bei $(a,b)$ parallel zur $y$-Achse läuft.

*Beweis des Satzes.* Die Formel für $h'$ aus Behauptung 2. ist leicht zu beweisen. Diese folgt nämlich durch Differenzieren der Identität $f(x,h(x))=0$ mittels der Kettenregel:

$$\frac{d}{dx}f(x,h(x)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,h(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,h(x))\cdot h'(x) = 0.$$

Schwieriger ist der Nachweis der Existenz eines solchen $h$. Hierzu vewrenden wir den Umkehrsatzes. Es sei

$$F : U \to \mathbb{R}^2, \quad F(x,y) := (x, f(x,y))^t.$$

Die Jacobi-Matrix von $F$ an der Stelle $(a,b)$ ist invertierbar, denn für die Funktionaldeterminante finden wir allgemein

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f_x(x,y) & f_y(x,y)\end{pmatrix} = f_y(x,y).$$

Insbesondere ist sie bei $(a,b)$ nach Voraussetzung von Null verschieden. Also ist $DF(a,b)$ bijektiv und $F$ erfüllt somit die Voraussetzungen des Umkehrsatzes. Es gibt daher eine offene Umgebung $A$ von $(a,b)$, sodaß $B := F(A)$ offen ist, $F_{|A} : A \to B$ bijektiv und $F_{|A}^{-1} : B \to A$ von der Klasse $C^p$ ist, und sodaß ferner für $(x,y)\in A$ stets $DF(x,y)$ invertierbar, d.h. $f_y(x,y)\neq 0$ ist. Offenbar ist $F_{|A}^{-1}$ von der Gestalt

$$F_{|A}^{-1}(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ \phi(u,v)\end{pmatrix}$$

mit einer geeigneten Funktion $\phi$, denn $F_{|A}^{-1}(u,v) = (x,y)^t$ ist ja gleichbedeutend mit $(u,v)^t = F(x,y) = (x, f(x,y))^t$, impliziert also $x=u$.

Wir setzen nun

$$B_1 := \{x|(x,0)\in B\}, \quad i : B_1 \to A,\ x \mapsto (x,0), \quad h := \phi\circ i.$$

Dann haben $A$, $B_1$ und $h$ die im Satz behaupteten Eigenschaften: Es ist $B_1$ offen (Übungsaufgabe), es ist $i$ unendlich oft differenzierbar und $\phi$ von der Klasse $\mathcal{C}^p$, sodaß auch $h$ von der Klasse $\mathcal{C}^p$ ist. Ist schließlich $(x,y)\in A$, so finden wir

$$\begin{aligned} f(x,y)=0 \quad &\Longleftrightarrow \quad F_{|A}(x,y) = (x,0)^t \\ &\Longleftrightarrow \quad (x,y) = F_{|A}^{-1}(x,0) \Longleftrightarrow y = \phi(x,0). \end{aligned}$$

$\square$

*Beispiel.* Wir betrachten die Funktion $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Die Menge aller $(x,y)$ mit $f(x,y) = 0$ ist gerade der Einheitskreise in der $\mathbb{R}^2$-Ebene. Es ist $f_y(0,1) \neq 0$. Die durch $f(x,y) = 0$ bei $(0,1)^t$ definierte implizite Funktion $y = h(x)$ erfüllt

$$f_x + f_y \cdot h'(x) = 2x + 2h(x) \cdot h'(x) = 0,$$

also die Differentialgleichung $h = -x/h'$ mit $h(0) = 1$. Die Lösung ist natürlich $h(x) = \sqrt{1-x^2}$, etwa mit Definitionsbereich $(-1,+1)$.

Es ist nicht schwierig, den im oben bewiesenen Satz erklärten Sachverhalt wesentlich allgemeiner auszusprechen. Allerdings müssen wir dazu wieder die Sprache der Linearen Algebra heranziehen.

Hauptsatz über implizite Funktionen

**Satz.** *Es seien $V$ und $Z$ endlichdimensionale reelle Vektorräume, $U$ eine offene Teilmenge von $V$ und $f \in \mathcal{C}^p(U,Z)$ für ein $p \geq 1$. Weiter sei $a$ ein Punkt in $U$, sodaß $f(a) = 0$ und $Df(a)$ surjektiv ist. Wählt man dann Unterräume $X$ und $Y$ von $V$ sodaß $V = X \oplus Y$ und die Einschrankung $(Df(a))|_Y \in \mathrm{Hom}(Y,Z)$ bijektiv ist, so gibt es eine offene Umgebung $A \subseteq U$ von $a$, eine offene Menge $B_1 \subset X$ und ein $h \in \mathcal{C}^p(X,Y)$, sodaß gilt:*

1. $\{v \in A : f(v) = 0\} = \{x + h(x) : x \in B_1\}$.
2. *Für alle $v \in A$ ist $DF(v)|_Y : Y \to Z$ ein Isomorphismus, und für alle $x \in B_1$ ist*

$$Dh(x) = -(DF(x+h(x))|_Y)^{-1} DF(x+h(x))|_X.$$

*Bemerkung.* Wir erinnern, daß $V = X \oplus Y$ bedeutet, daß sich jedes $v \in V$ in der Form $v = x + y$ mit durch $v$ eindeutig bestimmten $x \in X$ und $y \in Y$ schreiben läßt. In Analogie zum ersten Satz läge es nahe, die symbolische Schreibweise

$$\frac{\partial f}{\partial Y}(v) := Df(v)|_Y$$

(und ähnlich für $X$) einzuführen. Dann könnte man die Gleichung für $Dh$ in der suggestiveren Form

$$h'(x) = -\left(\frac{\partial f}{\partial Y}(x+h(x))\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial X}(x+h(x))$$

schreiben.

*Beweis des Satzes.* Der Beweis verläuft analog zu dem des oben betrachteten Spezialfalls.

Dazu betrachten wir die Funktion

$$F : U \to X \times Z,\ F(x+y) = (x, f(x+y)) \qquad (x \in X,\ y \in Y).$$

Wir erinnern, daß $X \times Z$ den Vektoraum aller Paare $(x, z)$ mit $x \in X$ und $z \in Z$ bedeutet, und die Summe und Skalarmultiplikation hierbei komponentenweise erklärt ist.

Wie man leicht nachrechnet ist für $v \in U$ und $h + k \in V$ (mit $h \in X$ und $k \in Y$)

$$DF(v)(h+k) = (h,\, Df(v)(h+k)).$$

Also ist $DF(v)(h+k) = 0$ genau dann, wenn $Df(v)(k) = 0$. Damit erkennen wir: Es ist $DF(v)$ injektiv genau dann, wenn $Df(v)|_Y$ injektiv ist. Da nach Voraussetzung $Df(a)|Y$ bijektiv ist, folgt zunächst $\dim Y = \dim Z$, und dann auch $\dim V = \dim X \times Z$. Also haben wir sogar die Aussage: Es ist $DF(v)$ bijektiv genau dann, wenn $Df(v)|_Y$ bijektiv ist.

Insbesondere ist also $DF(a)$ invertierbar. Nach dem Umkehrsatz bildet $F$ daher eine offene Umgebung $A$ von $a$ bijektiv auf eine offene Tenge $B \subseteq X \times Z$ ab, wobei wir noch voraussetzen können, daß $DF(a)$ für alle $a \in A$ bijektiv ist. Man überlegt sich leicht, daß $F_{|A}^{-1}$ von der Gestalt

$$F_{|A}^{-1}((u,z)) = u + \phi(u,z) \qquad ((u,z) \in X \times Z)$$

ist, wo $\phi \in \mathcal{C}^p(B, Y)$. In der Tat ist ja für $x \in X$ und $y \in Y$ die Gleichung $x + y = F_{|A}^{-1}((u,z)$ gleichbedeutend mit $F(x+y) = (x, f(x+y)) = (u,z)$.

Wir setzen

$$h : B_1 := \{x | (x,0) \in B\} \to A, \quad h(x) = \phi(x,0).$$

Man prüft leicht nach, daß $B_1$ offene Teilmenge des Vektorraums $X$ ist, und daß $h$ vom Typ $\mathcal{C}^p$ ist (man schreibe wieder $h = \phi \circ i$ mit der Abbildung $i : B_1 \to A$, $x \mapsto (x,0)$, un überlege sich, daß letztere unendlich oft differenzierbar ist.

Die Behauptung 1. folgt damit genau so wie im Beweis des vorangehenden Satzes: für $x \in X$, $y \in Y$ und $x + y \in A$ folgert man

$$\begin{aligned} f(x+y) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad F_{|A}(x+y) = (x,0) \\ &\Longleftrightarrow \quad x + y = F_{|A}^{-1}(x,0) \Longleftrightarrow y = \phi(x,0). \end{aligned}$$

Zum Beweis von 2. differenzieren wir die Identität $f \circ G \equiv 0$ mittels der Kettenregel, wo

$$G : B_1 \to V,\ G(x) = x + h(x).$$

Es folgt $DG(x) = \mathrm{id}|_{\mathrm{X}} + Dh(x)$ (Übungsaufgabe) und damit dann

$$\begin{aligned} 0 = Df(G(x)) \circ DG(x) &= Df(G(x)) \circ id|_X + Df(G(x)) \circ Dh(x) \\ &= Df(x + h(x))|_X + Df(x + h(x))|_Y \circ Dh(x). \end{aligned}$$

$\square$

Wir wollen nun den Satz über implizite Funktionen noch in der klassischen Form, d.h. für eine Abbildung $\mathbb{R}^m \supseteq U \to \mathbb{R}^n$ aussprechen. Wir nehmen dazu $m \geq n$ an, und erwarten, daß wir die Lösungsmenge von $f(x) = 0$ durch $m-n$ Parameter beschreiben können, sie also im naiven Sinne $m-n$-*dimensional* ist.

**Satz.** *Sei* $f = (f_1, \ldots, f_n)^t \in \mathcal{C}^p(U, \mathbb{R}^n)$ *mit* $p \geq 1$, *wo* $U$ *offene Teilmenge des* $\mathbb{R}^m$ *ist. Sei* $a \in U$ *mit* $f(a) = 0$, *und sodaß Die Jacobimatrix* $J_f(a)$ *den Rang* $n$ *hat. Indem man die Variablen* $(x_1, \ldots, x_m)$ *ggfs. umnummeriert, kann man annehmen, daß die Untermatrix*

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_{m-n+j}}(a)\right)_{1 \leq i,j \leq n}$$

*von* $J_f(a)$ *eine von Null verschiedene Determinante hat. Dann gibt es eine offene Umgebung* $A \subseteq U$ *von* $a$, *eine offene Teilmenge* $B_1$ *des* $\mathbb{R}^{m-n}$ *und eine Funktion* $h \in \mathcal{C}^p(B_1, \mathbb{R}^{m-n})$, *sodaß gilt:*

Implizite Funktionen klassisch

$$\begin{aligned}&\{(x_1, \ldots, x_m) \in A : f_1(x_1, \ldots, x_m) = 0, \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_m) = 0\} \\ &\quad = \{(x_1, \ldots, x_{m-n}, h(x_1, \ldots, x_{m-n})) : (x_1, \ldots, x_{m-n}) \in B_1\}\end{aligned}$$

*Beweis.* Dies ist ein Spezialfall des vorangehenden Satzes, angewandt auf

$$V = \mathbb{R}^m,\ X = \{(x, 0)^t : x \in \mathbb{R}^{m-n}\},\ Y = \{(0, y)^t : y \in \mathbb{R}^n\}.$$

Die nach dem vorangehenden Satz existierende offene Teilmenge $B_1$ liegt dann in $X$, und die hier Gefragte erhält man in der Form $I(B_1)$, wo $I : \mathbb{R}^{m-n} \to X$ den Vektorraumisomorphismus mit $I(x) = (x, 0)^t$ bedeutet. Ferner hat man für die hier gefragte Funktion $h$ die Funktion $h \circ I$ mit dem $h$ aus dem vorangehenden Satz zu nehmen. □

## 5.4 Maxima und Minima mit Nebenbedingung

Extremwert mit Nebenbedingung

**Definition.** Seien $V$ und $Z$ endlich dimensionale reelle Vektorräume, $U \subseteq V$ eine offene Teilmenge, und $f : U \to \mathbb{R}$ und $g : U \to Z$ seien Funktionen. Wir sagen $f$ *hat an der Stelle* $a \in U$ *ein lokales Maximum (bzw. Minimum) unter der Nebenbedingung* $g = 0$ falls $g(a) = 0$ gilt und es eine Umgebung $\tilde{U} \subseteq U$ von $a$ gibt, so daß $f(x) \leq f(a)$ (bzw. $f(x) \geq f(a)$) für alle $x \in \tilde{U}$ mit $g(x) = 0$ gilt.

*Bemerkung.* In den Anwendungen wird einem diese Situation in der Gestalt mehrerer Nebenbedingungen begegnen. Ein lokaler Extremwert von $f$ *unter den Nebenbedingungen* $g_1 = \cdots = g_p = 0$ ist dann natürlich nichts anderes als ein lokaler Extremwert von $f$ unter der Nebenbedingung $g = 0$, wo $g := (g_1, \ldots, g_p)^t$ gesetzt ist.

Ein lokaler Extremwert unter einer Nebenbedingung $g = 0$ ist kein lokaler Extremwert schlechthin. Daher können wir auch nicht erwarten, daß $Df(a) = 0$ ist, wenn $a$ ein Extremwert mit Nebenbedingung (und $f$ differenzierbar) ist. Trotzdem kann man ein notwendiges Kriterium für die Existenz lokaler mittels der Ableitung von $f$ formulieren, es sind allerdings dazu auch die Ableitung von $g$ zu berücksichtigen.

Bedingung von Lagrange

**Satz.** *Es seien $X$ und $Z$ endlich dimensionale reelle Vektorräume, $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge und $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ und $g \in \mathcal{C}^1(U, Z)$. Sei $a \in U$, sodaß $Dg(a)$ surjektiv ist. Hat $f$ bei $a$ ein lokales Maximum bzw. Minimum unter der Nebenbedingung $g = 0$, dann gibt es eine lineare Abbildung $\lambda \in$ $\mathrm{Hom}(Z, \mathbb{R})$, sodaß $Df(a) = \lambda \circ Dg(a)$.*

Lagrange Multiplikatoren

*Bemerkung.* Ist $Z = \mathbb{R}^n$, so ist jede lineare Abbildung $Z \to \mathbb{R}$ von der Gestalt $\lambda(x_1, \dots, x_n) = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$ mit geeigneten Konstanten $\lambda_i$. Schreiben wir $g(x) = (g_1(x), \dots, g_n(x))^t$, also auch $Dg(a) = (Dg_1(a), \dots, Dg_n(a))^t$, so ist die Bedingung $Df(a) = \lambda \circ Dg(x)$ gleichbedeutend mit der Existenz von reellen Zahlen $\lambda_i$ $(1 \leq i \leq n)$, sodaß

$$Df(a) = \lambda_1\, Dg_1(a) + \cdots + \lambda_n\, Dg_n(a).$$

Die hier auftretenden Zahlen $\lambda_i$ heißen Lagrange Multiplikatoren.

*Übung.* Man zeige, daß für $f$ und $g$ wie im Satz die folgenden beiden Bedingungen äquivalent sind:

1. es gibt ein $\lambda \in \mathrm{Hom}(Z, \mathbb{R})$ mit $Df(a) = \lambda \circ Dg(a)$.
2. $Df(a)$ verschwindet auf dem Kern von $Dg(a)$.

Der Beweis hierzu zeigt auch, daß $\lambda$ im allgemeinen nicht eindeutig durch $f$ und $g$ bestimmt ist.

*Bemerkung.* Den Unterraum $T := \mathrm{Kern}(Dg(a))$ von $X$ nennt man *Tangentialraum der Mannigfaltigkeit* $M := \{x \in X : g(x) = 0\}$ an der Stelle $a$. Man beachte, daß $\dim T = \dim X - \dim Z$, da ja $Dg(a)$ surjektiv ist. Diese Bezeichnung ist zum Beispiel durch folgende Betrachtung gerechtfertigt: Betrachten wir nämlich eine offene Umgebung $A$ von $a$ und eine Funktion $h \in \mathcal{C}^1(V, X)$ auf einer offenen Menge $V$ von $\mathbb{R}^p$, sodaß $M \cap A = h(V)$ gilt, etwa mit $a = h(0)$. Solch $A$ und $h$ gibt es nach dem Satz über implizite Funktionen (da $Dg(a)$ surjektiv ist); es ist dabei $p = \dim X - \dim Z$. Nun strebt $(h(v) - a - Dh(0)(v))/\|v\|$ gegen 0, wenn nur $v$ gegen 0 strebt. Dementsprechend ist $a + \{Dh(0)(v) : v \in \mathbb{R}^p\}$ der *affine* Unterraum von $X$, der $M$ bei $a$ am besten approximiert. Es ist aber $g \circ h = 0$. Nach der Kettenregel also $0 = Dg(a) \circ Dh(0)$, also $\{Dh(0)(v) : v \in \mathbb{R}^p\} \subseteq T$, und hier gilt sogar Gleichheit, da ja die Dimensionen übereinstimmen.

Die Bedingung $Df(a) = \lambda \circ Dg(a)$ besagt also, daß $Df(a)$ auf dem Tangentialraum vom $M$ bei $a$ verschwindet.

*Beweis des Satzes.* Nach Voraussetzung ist $Dg(a)$ surjektiv. Wir setzen $T :=$ Kern$(Dg(a))$ und wählen ein Komplement $Y$ von $T$, sodaß also $X = T \oplus Y$. Dann ist die Einschränkung $Dg(a)|_Y$ bijektiv.

Auf $g$ können wir daher den Satz über implizite Funktionen anwenden: Es gibt eine offene Umgebung $A$ von $a$, eine offene Teilmenge $B_1$ von $T$ und eine Funktion $h \in C^0(B_1, Y)$, sodaß

$$A \cap \{x \in X \mid g(x) = 0\} = \{x + h(x) \mid x \in B_1\}.$$

Daß $a$ ein lokales Extremum von $f$ unter der Nebenbedingung $g = 0$ ist, wird mit diesen Bezeichnungen äquivalent zu der Aussage, daß $a_0$ lokales Extremum von

$$\phi : B_1 \to \mathbb{R}, \quad \phi(x) = f(x + h(x))$$

ist, wo $a = a_0 + a_1$ mit $a_0 \in T$ und $a_1 \in Y$. Nach einem früher bewiesenen Satz folgt $D\phi(a_0) = 0$. Wir zeigen, daß dies gerade die Lagrangesche Bedingung impliziert.

Nach Kettenregel ist

$$D\phi(a_0) = Df(a)|_T + Df(a)|_Y \circ Dh(a_0)$$

(zum Beweis schreibe man $\phi = f \circ G$ mit $G : B_1 \mapsto X$, $G(x) = x + h(x)$; vgl. den Beweis des Satzes über implizite Funktionen). Nach dem Satz über implizite Funktionen ist dabei

$$Dh(a_0) = -Dg(a)|_Y^{-1} \circ Dg(a)|_T.$$

Mit $D\phi(a_0) = 0$ erhalten wir so

$$Df(a)|_T = Df(a)|_Y \circ Dg(a)|_Y^{-1} \circ Dg(a)|_T.$$

Für $h = t + y \in X$ mit $t \in T$ und $y \in Y$ finden wir schließlich

$$\begin{aligned} Df(a)(h) &= Df(a)|_T(t) + Df(a)|_Y(y) \\ &= Df(a)|_Y \circ Dg(a)|_Y^{-1}\big(Dg(a)|_T(t) + Dg(a)|_Y(y)\big) \\ &= Df(a)|_Y \circ Dg(a)|_Y^{-1} \circ Dg(a)(t). \end{aligned}$$

Die im Satz behauptete Identität können wir also mit

$$\lambda := Df(a)|_Y \circ Dg(a)|_Y^{-1}$$

erfüllen. □

*Beispiel.* Es sei $X$ ein euklidischer Vektorraum mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und der zugehörigen Norm $|x| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Weiter sei $A : X \to X$ eine

Selbstadjungierter Endomorphismus

lineare Abbildung von $X$ auf sich mit der besonderen Eigenschaft, daß für alle $x, y \in X$ stets

$$\langle A(x), y\rangle = \langle x, A(y)\rangle$$

gilt. Eine solche Abbildung $A$ heißt *selbstadjungiert*. Ist etwa $X = \mathbb{R}^n$, versehen mit dem Standardskalarprodukt, und ist $M$ diejenige Matrix, sodaß $A(x) = M \cdot x$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt, so ist $A$ genau dann selbstadjungiert, ffwenn die Matrix $M$ *symmetrisch* ist (d.h. symmetrisch bezüglich ihrer Hauptachse ist, also $M = M^t$ erfüllt).

Wir betrachten den Einheitsball $S := \{x \in X : \|x\| = 1\}$ von $X$. Da $S$ kompakt ist und die Abbildung

$$f : X \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \langle A(x), x\rangle$$

stetig ist, nimmt $f$ auf $S$ sein Maximum und Minimum an. Wir wollen diese und überhaupt alle lokalen Extremwerte von $f$ auf $S$ bestimmen. Dazu setzen wir

$$g : X \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \langle x, x\rangle - 1.$$

Wir suchen also die lokalen Extrema von $f$ unter der Nebenbedingung $g = 0$.

Dazu berechnen wir zunächst die Ableitung von $f$. Es ist

$$\begin{aligned} f(x+h) &= \langle A(x+h), x+h\rangle \\ &= \langle A(x), x\rangle + \langle A(h), x\rangle + \langle A(x), h\rangle + \langle A(h), h\rangle \\ &= \langle A(x), x\rangle + 2\langle A(x), h\rangle + \langle A(h), h\rangle, \end{aligned}$$

wobei die zweite Ungleichung aus der Selbstadjungiertheit von $A$ folgt. Nach der Ungleichung von Cauchy und Schwarz ist

$$\langle A(h), h\rangle \le \|A(h)\| \cdot \|h\| \le \|A\| \cdot \|h\|^2$$

mit der üblichen Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathrm{Hom}(X, X)$ (d.h. dem Maximum von $\|A(x)\|$ auf $S$). Es folgt K

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - 2\langle A(x), h\rangle\|}{\|h\|} = 0,$$

und so

$$Df(x)(h) = 2\langle A(x), h\rangle.$$

Mit $A = id$ finden wir noch sofort $Dg(x)(h) = 2\langle x, h\rangle$.

Nach dem Lagrange-Kriterium bedeutet dies, daß ein $x$ genau dann kritische Punkte von $f$ bezüglich der Nebenbedingung $g = 0$ ist (d.h. $Df(a)$ auf dem tangentialraum an $S$ in $a$ verschwindet), wenn es ein $\lambda$ gibt mit

$$2\langle A(x), h\rangle = \lambda \cdot 2\langle x, h\rangle = 2\langle \lambda x, h\rangle$$

für alle $h \in X$. Diese Bedingung ist aber gleichbedeutend mit $A(x) = \lambda x$, d.h. damit, daß $x$ ein Eigenvektor zu $A$ ist. Es ist dabei $f(x) = \lambda$.

Insbesondere sehen wir, daß das globale Maximum von $f$ auf $S$ gerade der maximale Eigenwert on $A$ ist, also $a$ stets einen reellen Eigenwert besitzt. (In der Tat sind alle Eigenwerte einer selbstadjungierten Abbildung reell, was wir hier aber nicht weiter verfolgen werden, da dies in die lineare Algebra gehört.)

# Kapitel 6

# Integralrechnung

## 6.1 Definition des Riemannschen Integrals

Ist $D$ eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und $f$ eine auf $D$ definierte reellwertige Funktion, etwa $f \geq 0$, so wollen wir in den Analysis I das Volumen der Menge messen, die im $\mathbb{R}^{n+1}$ oberhalb $D$ und unterhalb des Graphen von $f$ liegt. Dieses werden wir dann mit

$$\int_D f,$$

das Integral von $f$ über $D$ bezeichnen. Insbesondere werden wir damit auch ein Volumen für Teilmengen $D$ des $\mathbb{R}^n$ definiert haben, nämlich

$$\mathrm{vol}(D) := \int_D 1$$

wo 1 die Funktion bezeichnet, die auf $D$ konstant gleich 1 ist.

Um zu einer Definition von $\int_D f$ zu gelangen, wollen wir zunächst eine minimale Liste der Eigenschaften aufstellen, die wir von einem vernünftigen Integralbegriff erwarten. Hierzu können wir zur konzeptionellen Vereinfachung des Problems direkt folgende Normierung vornehmen: Es genügt einen Integralbegriff

$$\int f = \int_{\mathbb{R}^n} f$$

für eine geeignet große Klasse von Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zu erklären. Damit erhält man dann sofort den Begriff des Integrals $\int_D f$, indem man definiert

$$\int_D f := \int_{\mathbb{R}^n} f_D$$

wobei wir setzen

$$f_D(x) := \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in D \\ 0 & \text{für } x \notin D \end{cases}$$

Insbesondere haben wir dann

$$\mathrm{vol}(D) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_D,$$

wo $\chi_D$ die charakteristische Funktion von $D$ bezeichnet:

$$\chi_D(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in D \\ 0 & \text{für } x \notin D \end{cases}$$

Wir können nicht erwarten, ein Symbol $\int f$ in *vernünftiger* Art und Weise für jede a priori mögliche Abbildung zu erklären, denn wir können nicht einmal erwarten, $\mathrm{vol}(D)$ für beliebige Mengen $D \subseteq \mathbb{R}^n$ messen zu können. Abgesehen von Problemen mit zu großen (unbeschränkten) Mengen, kann man sich auch andere exotische Obstruktionen überlegen. Wir werden hierauf zurückkommen, sobald wir einen Katalog von Eigenschaften erstellt haben, den unser Integralbegriff in jedem Fall erfüllen muß, sobald wir also das eben ausgesprochene Wort *vernünftig* präzisiert haben werden.

Wir werden also $\int f$ nur füer eine genügend große Teilmenge $Z$ von Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ erklären können. Eine erste Forderung wird die Linearität sein:

**(Lin)** Die Menge $Z$ ist ein linearer Unterraum des reellen Vektorraumes aller Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Die Abbildung $\int : Z \to \mathbb{R}$, $f \to \int f$ ist linear.

Ferner fordern wir die Monotonie:

**(Mon)** Ist $f \in \mathbb{Z}$, $f \geq 0$, so ist $\int f \geq 0$.

Der implizite Volumenbegriff soll unserer Intuition entsprechen:

**(Q)** Sind $I_1, \ldots, I_n$ abgeschlossene Intervalle in $\mathbb{R}$, so gilt $\chi_{I_1 \times \cdots \times I_n} \in Z$ und

$$\int \chi_{I_1 \times \ldots, \times I_n} = l(I_1) \cdots l(I_n),$$

wo $l([a,b]) = b - a$ für $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ gilt.

Eine Menge $Q$ der Gestalt $I_1 \times \cdots \times I_n$ mit $I_j$ gleich einem Intervall in $\mathbb{R}$ bezeichnen wir als Quader. Man überlegt sich leicht, daß $Q$ abgeschlossen (offen) ist genau dann wenn alle $I_j$ in $\mathbb{R}$ abgeschlossen oder offen sind

Quader

Schließlich stellen wir noch die Forderung

**(Res)** Sei $A$ eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Ist $\chi_A \in Z$ und $f \in Z$, so ist $f \cdot \chi_A \in Z$.

Damit definieren wir dann - wie oben schon angedeutet -

**Definition.** Für $f \in Z$ und $A \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\chi_A \in Z$ setzen wir:

$$\int_A f := \int f \cdot \chi_A, \qquad \mathrm{vol}(A) := \int \chi_A.$$

Ohne $Z$ schon näher zu präzisieren, ziehen wir schon einige Folgerungen aus (Lin), (Mon), (Q) und (Res)

**Satz.** *Seien $f, g \in Z$ und $A \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\chi_A \in Z$. Ist $f \leq g$, so folgt $\int_A f \leq \int_A g$. Insbesondere gilt*

$$\mathrm{vol}(A) \cdot \inf_{x \in A} f(x) \leq \int_A f \leq \mathrm{vol}(A) \cdot \sup_{x \in A} f(x)$$

*(falls $\inf_{x \in A} f(x)$ bzw. $\sup_{x \in A} f(x)$ endlich, d.h. reelle Zahlen, sind).*

*Beweis.* Es ist $(g - f)\,\chi_A \geq 0$ und $(g - f)\,\chi_A \in Z$ nach (Lin) und (Res). Daher folgt

$$0 \leq \int (g - f)\chi_A = \int g\chi_A - \int f\chi_A = \int_A g - \int_A f,$$

nacheinander mit (Mon) und (Lin). Der Zusatz folgt dann sofort mit

$$\inf f(x) \leq f \leq \sup f(x).$$

□

**Satz.** *Für jeden Quader $Q$ ist $\chi_Q \in Z$*

*Beweis.* Nach (Q) ist dies für abgeschlossene Quader richtig. Sei nun $R = I_1 \times \cdots \times I_n$ und $I_j = |a_j, b_j|$, wo $|$ für eines der Symbols $(, [, ), ]$ steht. Die $2n$ Seitenflächen von $Q$ sind

$$\overline{I}_1 \times \cdots \times \overline{I}_{j-1} \times \{c\} \times \overline{I}_{j+1} \times \cdots \times \overline{I}_n \qquad (c = a_j, b_j).$$

Hierbei steht $\overline{I}$ für den (topologischen) Abschluß von $I$, also $I = [a, b]$, wenn $I = |a, b|$ ist. Man beachte, daß auch die Seitenflächen abgschlossene Quader sind (denn Einpunktmengen $\{c\}$ in $\mathbb{R}$ sind abgeschlossenen Intervalle). Es ist $R$ die mengentheoretische Differenz von $\overline{R}$ und einer Vereinigung $V$ von Seitenflächen. Demgemäß ist $\chi_R = \chi_{\overline{R}} - \chi_V$, und daher $\chi_R \in Z$, wenn nur $\chi_V \in Z$. Letzteres ist aber richtig. Sind nämlich $A_1, \cdots, A_t$ irgendwelche Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, so ist

$$\chi_{A_1 \cup \cdots \cup A_t} = \sum_i \chi_{A_j} - \sum_{i<j} \chi_{A_i}\chi_{A_j} + \sum_{i<j<h} \chi_{A_i}\chi_{A_j}\chi_{A_k} \mp \cdots$$
$$\cdots + (-1)^t \chi_{A_i} \cdots \chi_{A_k}$$

Der Beweis dieser Formel geschieht leicht durch Induktion über $t$ unter Benutzung des leicht einzusehenden Spezialfalls

$$\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \chi_B$$

Sind nun die $\chi_{A_j} \in Z$, so ist nach (Res) und (Lin) wegen obiger Formel dann auch $\chi_{A_1 \cup \cdots \cup A_t} \in Z$. □

**Korollar (zum Beweis).** *Sind $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\chi_A$, $\chi_B \in Z$ so sind auch $\chi_{A \cup B}$, $\chi_{A \setminus B}$ und $\chi_{A \cap B}$ Funktionen von $Z$.*

*Beweis.* Für $\chi_{A \cup B}$ haben wir dies im vorstehenden Beweis gesehen. Die weiteren Behauptungen folgen ähnlich mittels der Formeln

$$\chi_{A \setminus B} = \chi_{(A \cup B) \setminus B} = \chi_{A \cup B} - \chi_B, \quad \chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B.$$

□

Seite eines Quaders

Unter der Seite $T$ eines abgeschlossenen Quaders $S = I_1 \times \cdots \times I_n$ verstehen wir dabei eine Teilmenge von $S$ der Gestalt $T = J_1 \times \cdots \times J_n$, wo $J_i = I_i$ oder $J_i = \{c\}$ ist, und $c$ einen der beiden Randpunkte von $I_i$ bezeichnet. Insbesondere sind also $S$, als auch die Seitenflächen von $S$, Seiten von $S$. Eine Seite $T$ eines Quaders $Q$ ist offenbar auch ein abgeschlossener Quader, also $\chi_T \in Z$. Ist $T \neq Q$, so ist offenbar $\mathrm{vol}(T) = 0$ (nach (Q)).

Partition

**Definition.** Eine endliche Teilmenge $P$ von abgeschlossenen Quadern heißt *Partition des Quaders $Q$*, falls gilt

1. $Q = \bigcup_{S \in P} S$.
2. Sind $S, S' \in P$, so ist ist $S \cap S'$ leer oder Seite von $S$ und $S'$

**Satz.** *Sei $f \in Z$ beschränkt mit beschränktem Träger*

$$\mathrm{supp}(f) := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\},$$

*etwa* $\mathrm{supp}(f) \in Q$ *für ein geeignetes abgeschlossenes Quader $Q$. Dann gilt*

$$\sup_P \sum_{S \in P} \mathrm{vol}(S) \cdot \inf_S(f) \leq \int f \leq \inf_P \sum_{S \in P} \mathrm{vol}(S) \cdot \sup_S(f).$$

*Hierbei durchläuft $P$ alle Partitionen von $Q$.*

*Bemerkung.* Die hier links und rechts auftretenden Summen heißen in der Literatur *Riemannsche Unter- bzw. Obersummen von $f$ auf $Q$*. Wir bezeichnen sie im folgenden mit $U_P(f)$ und $O_P(f)$.

Riemannsche Ober- Untersummen

*Beweis des Satzes.* Ist $P$ eine Partition von $Q$, so ist $Q = \bigcup_S \in S$, und daher (vgl. den vorletzten Beweis)

$$\chi_Q = \sum_{U \subseteq P} (-1)^{|U|} \chi_{\bigcap_{S \in U} S} = \sum_{U \subseteq P} (-1)^{|U|} \prod_{S \in U} \chi_S.$$

Und so — mit $f = f \cdot \chi_Q$ — dann

$$\int f = \int f \chi_Q = \sum_{U \subseteq P} (-1)^{|U|} \int_{\bigcap_{S \in U} S} f$$

Hat nun $U$ mehr als ein Element, so ist $H := \bigcap_{S \in U} S$ eine Seite eines $S \in P$ und $H \neq S$, also $\mathrm{vol}(H) = 0$. Wegen

$$\mathrm{vol}(H) \inf_H f \leq \int_H f \leq \mathrm{vol}(H) \sup_H f$$

ist daher $\int_H f = 0$. Es folgt

$$\int f = \sum_{S \in P} \int_S f.$$

Mit

$$\mathrm{vol}(S) \inf_S f \leq \int_S f \leq \mathrm{vol}(S) \sup_S f$$

folgt jetzt die Behauptung. $\square$

Wir treffen gemäß dem vorstehenden Satz nun folgende Definition:

**Definition.** Sei $Z$ die Menge aller Abbildungen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften

- $f$ ist beschränkt.
- $\mathrm{supp}(f)$ ist beschränkt.
- Es gilt einen abgeschlossenen Quader $Q$, welcher $\mathrm{supp}(f)$ enthält, und so daß
$$\sup_P \sum_{S \in P} \mathrm{vol}(S) \inf_S f = \inf_P \sum_{S \in P} \mathrm{vol}(S) \sup_S f,$$
wo $P$ alle Partitionen von $Q$ durchläuft.

Meßbar
Integrierbar

Wir nennen eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ meßbar, wenn $\chi_A$ in $Z$ liegt. Eine auf einer meßbaren Menge definierte Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ heißt integrierbar , falls $f_A$ (siehe oben) zu $Z$ gehört.

Riemann-
integrierbar

*Bemerkung.* Der Begriff der in unserem Sinne auf einem abgeschlossenem Quader $Q$ integrierbaren Funktion stimmt mit dem Begriff der *auf $Q$ Riemann-integrierbaren Funktion* überein, wie er in der Literatur zu finden ist (wir lassen hier den Namen RIEMANN lediglich der Bequemlichkeit halber weg).

*Übung.* Man überlege sich, das die dritte Eigenschaft in der Definition nicht vor der speziellen Wahl des abgeschlossenen Quaders $Q$ abhängt.

**Satz.** *$Z$ ist ein linearer Unterverktorraum (des Raumes aller reellwertigen Abbildungen auf dem $\mathbb{R}^n$) Es gilt eine und nur eine Abbildung $\int : Z \to \mathbb{R}$, die (Lin), (Mon), (Q) und (Res) erfüllt.*

*Beweis.* Die Eindeutigkeit der Abbildung $\int$ ist nach dem vorangehenden Satz klar; es muß gelten

$$\int f = \sup_P U_P(f) = \inf_P O_P(f),$$

wo $P$ die Partitionen eines Quaders $Q \supseteq \mathrm{supp}(f)$ durchläuft.

Wir nehmen die angeführte Formel nun umgekehrt als Definition von $\int f$ und zeigen, daß die behaupteten Eigenschaften zutreffen.

Zum Nachweis von (Lin): Seien $f, g \in Z$. Dann gilt für jede Teilmenge $A$ des $\mathbb{R}^n$ :

$$\inf_A \ f + \inf_A g \leq \inf_A (f+g) \leq \sup_A (f+g) \leq \sup_A f + \sup_A g$$

Daher ist klar, daß $f+g$ beschränkt ist und Support in einem geeigneten abgeschlossenen Quader $Q$ hat. Ist $P$ eine Partition von $Q$, so hat man nach den vorangehenden Formeln auch noch

$$U_P(f) + U_P(g) \leq U_P(f+g) \leq O_P(f+g) \leq O_P(f) + O_P(g).$$

Hieraus folgt sofort $f+g \in Z$ und $\int (f+g) = \int f + \int g$. Den Nachweis, daß $\lambda f \in Z$ und $\int (\lambda f) = \lambda \int f$ für $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt, lassen wir als Übungsaufgabe.

Die Montonie (Mon) und die Eigenschaft (Q) ist unmitelbar nach der Definition von $\int f$ klar. Die Eigenschaft (Res) folgt aus dem nachfolgenden schärferen Satz. □

**Satz.** *Sind $f, g \in Z$, so ist auch $f \cdot g \in Z$.*

*Bemerkung.* Demnach ist $Z$ nicht nur ein Vektorraum, sondern sogar eine *Algebra*. (Zur genauen Klärung dieses Begriffes verweisen wir auf die Algebra).

Zum Beweis benötigen wir zwei Lemmata.

**Lemma.** *Sei $Q$ ein abgeschlossener Quader und $f : Q \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann ist $f$ genau dann integrierbar, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ eine Partition $P$ von $Q$ existiert, sodaß $O_P(f) - -U_P(f) < \epsilon$ gilt.*

*Beweis.* Die Intgerierbarkeit ist jedenfalls äquivalent zur Aussage, daß zu jedem $\epsilon > 0$ Partitionen $P_1$ und $P_2$ von $Q$ existieren, sodß $O_{P_1}(f) - U_{P_2}(f) < \epsilon$. Dabei sind a priori $P_1$ und $P_2$ verschieden, und wir haben zu zeigen, daß man o.B.d.A. $P_1 = P_2$ annehmen darf.

Verfeinerung einer Partition

In der Tat kann man nämlich eine gemeinsame *Verfeinerung* $P$ von $P_1$ und $P_2$ wählen: z.B. kann man $P$ als die Menge aller Schnitte $S_1 \cap S_2$ wählen, wo $S_1$ und $S_2$ die Teilquader von $P_1$ und $P_2$ durchlaufen. Wir lassen es als Übungsaufgabe, nachzuprüfen, daß $P$ wieder eine Partition von $Q$ ist. Ferner ist dieses $P$ tatsächlich eine Verfeinerung von $P_1$ (als auch $P_2$), d.h jeder Teilquader von $P$ ist in einem Teilquader von $P_1$ enthalten. Schließlich ist unmittelbar aus der Definition der Ober-und Untersummen klar, daß für jede beliebige Verfeinerung $P$ von $P_1$ gilt:

$$U_{P_1}(f) \leq U_P(f) \leq O_P(f) \leq O_{P_1}(f).$$

Insbesondere folgt hiermit die Ungleichung

$$O_P(f) - O_P(f) \leq O_{P_1}(f) - U_{P_2}(f) < \epsilon,$$

und dies impliziert nun unsere Behauptung, daß man $P_1 = P_2$ annehmen darf. □

**Lemma.** *Ist $f \in Z$, so sind auch $f_+ := \max(f,0)$ und $f_- := \min(f,0)$ Elemente von $Z$ .*

*Beweis.* Dies folgt leicht mittels

$$\sup_A f - \inf_A f \geq \sup_A f_+ - \inf_A f_+,$$

und der analogen Formel mit $f_-$ statt $f_+$, wo $A$ eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Danach hat man nämlich für jede Partition $P$ eines $\mathrm{supp}(f)$ (und damit auch $\mathrm{supp}(f_+)$) umfassenden abgeschlossenen Quaders $Q$ die Ungleichung

$$O_P(f) - U_P(f) \geq O_P(f_+) - U_P(f_+).$$

Mit den vorstehenden Lemma folgt dann dofort $O_P(f_+) = U_P(f_+)$. Der Nachweis von $f_- \in Z$ ist analog. □

*Beweis des Satzes.* Es ist $f = f_+ = f_-$ und $g = g_+ + g_-$, also

$$f_g = f_+g_+ - f_+(-g_-) - (-f_-)g_+ + (-f_-)(-g_-).$$

Es genügt somit den Satz für den Fall zu beweisen, daß $f, g \geq 0$ ist. Hier folgt er aber leicht mit

$$U_P(f)\, U_P(g) \leq U_P(fg) \leq O_P(fg) \leq O_P(f)\, O_P(g),$$

was wiederum aus

$$\inf_S(f)\ \inf_S(g) \leq \inf_S(fg) \leq \sup_S(fg) \leq \sup_S(f)\ \sup_S(g)$$

folgt. □

Wir werden im nächsten Abschnitt genauer untersuchen, welche Funktionen zu Z gehören. Wir beenden diesen Abschnitt mit einem Beispiel.

*Beispiel.*

## 6.2 Iterierte Integrale

In der Praxis berechnet man mehrdimensionale Integrale, indem man sie auf einfache Integrale (d.h. Integrale von Funktionen einer Variablen) zurückführt. Der zentrale Satz, der dies ermöglicht, ist der Satz von Fubini.

Zur genaueren Formulierung führen wir einige Bezeichnungen ein. Die Menge $Z$ aus dem vorangehenden Abschnitt bezeichnen wir hier mit $Z_n$. Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ beschränkt mit beschränktem Träger, so setzen wir

$$U\int f := U\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx := \sup_P U_P(f)$$
$$O\int f := O\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx := \inf_P O_P(f)$$

Hierbei durchläuft $P$ wie üblich alle Partitionen eines festgewählten abgeschlossenen Quaders $Q$, der den Träger von $f$ enthält.

Es ist leicht nachzuprüfen, daß $U\int f$ und $O\int f$ endlich sind: in der Tat hat man ja stets

$$\mathrm{vol}(Q)\inf_Q f \leq U_P(f) \leq O_P(f) \leq \mathrm{vol}(Q)\sup_Q f;$$

ferner, daß

$$U\int f \leq O\int f$$

gilt, und ihre Werte nicht von der Wahl von Q abhängen. Im Allgemeinen wird natürlich

$$U\int f < O\int f$$

gelten, und Gleichheit statt $<$ genau dann, wenn $f \in Z_n$.

Satz von Fubini

**Satz.** *Sei $f \in Z_{m+n}$. Für $x \in \mathbb{R}^m$ sei $f_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_x(y) = f(x,y)$, und es sei*

$$U(x) = U\int f_x = U\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)dy$$
$$O(x) = O\int f_x = O\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)dy.$$

*Dann sind $O(x)$ und $U(x)$ Elemente von $Z_m$ , und es gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^{m+n}} f = \int_{\mathbb{R}^m} U(x) = \int \left(U\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\,dy\right)dx$$
$$\int_{\mathbb{R}^{m+n}} f = \int_{\mathbb{R}^m} O(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \left(O\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\,dy\right)dx.$$

*Bemerkung.* Man überlegt sich leicht, daß $g_x$, für jedes $x \in \mathbb{R}^m$, beschränkt ist und endlichen Träger hat. Damit sind $U(x)$ und $O(x)$ wohl definiert.

Die Integrale auf der rechten Seite der Formel für $\int f$ heißen *iterierte Integrale.*

*Beweis des Satzes von Fubini.* Sei $Q$ ein abgeschlossener Quader, der den Träger $\operatorname{supp}(f)$ von $f$ enthält. Wir können $Q = A \times B$ schreiben, wo $A$ und $B$ abgeschlossene Quader im $\mathbb{R}^m$ bzw. $\mathbb{R}^n$ sind.

Sei $P_A$ eine Partition von $A$ und $P_B$ eine Partition von $B$. Offenbar ist dann $P := P_A \times P_B$ eine Partition von $Q = A \times B$, und für diese haben wir

$$U_P(f) = \sum_{S \in P_A} \inf_S(f) \cdot \operatorname{vol}(S) = \sum_{S_A \in P_A} \sum_{S_B \in P_B} \inf_{S_A \times S_B}(f) \cdot \operatorname{vol}(S_A) \cdot \operatorname{vol}(S_B).$$

Für $x \in S_A$ ist offenbar

$$\inf_{S_A \times S_B}(f) \leq \inf_{S_B}(f_x).$$

Es folgt

$$\sum_{S_B \in P_B} \operatorname{vol}(S_B) \inf_{S_A \times S_B}(f) \leq \sum_{S_B \in P_B} \operatorname{vol}(S_B) \inf_{S_B}(f_x) \leq U \int f_x = U(x),$$

und damit

$$\sum_{S_B \in P_B} \operatorname{vol}(S_B) \inf_{S_A \times S_B}(f) \leq \inf_{S_A} U.$$

Zusammen erhalten wir so

$$U_P(f) \leq U_{P_A}(U) \leq O_{P_A}(U) \leq O_{P_A}(O) \leq O_P(f).$$

Dabei ist der Beweis der letzten Ungleichung völlig analog zum Beweis der ersten, die zweite ist klar und die dritte folgt mit $U \leq O$. Da $f \in Z_n$ ist, folgt $\sup_P U_P(f) = \inf_P O_P(f) = f$, und somit auch

$$\sup_{P_A} U_{P_A}(U) = \inf_{P_A} O_{P_A}(U) = \int f,$$

d.h. $U \in Z_m$ und $\int_{\mathbb{R}^{m+n}} f = \int_{\mathbb{R}^m} U$.

Die Behauptung für $O$ folgt ähnlich aus den Ungleichungen

$$U_P(f) \leq U_{P_A}(U) \leq U_{P_A}(O) \leq O_{P_A}(O) \leq O_P(f)$$

□

*Bemerkung.* In der Praxis kommt es häufig vor, daß $f_x$ für jedes x integrierbar ist. Dies ist zum Beispiel der Fall, wenn $f$ stetig auf $A \times B$ ist, wo $A$ und $B$ abgeschlossene Quader in $\mathbb{R}^m$ bzw. $\mathbb{R}^n$ sind. Dann ist auch $f_x$, für jedes $x \in A$, stetig auf $B$. Im nächsten Abschnitt werden wir beweisen, daß dann

$f$ auf $A$ integrierbar ist, und $f_x$, für $x \in A$, stets auf $B$ integrierbar ist. Wir haben dann nach dem Satz von Fubini

$$\int_{A\times B} f = \int_A \left( \int_B f(x,y)dy \right) dx$$

Man mache sich dies unter Benutzung von

$$\int_{A\times B} f = \int_{\mathbb{R}^{m+n}} f_{A\times B}$$

klar.

Man kann den Satz von Fubini auch mehrmals anwenden. Ist etwa $f$ stetig auf $A := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$, so hat man

$$\int_A f = \int_{a_1}^{b_1} \left( \int_{a_2}^{b_2} \cdots \left( \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\, dx_n \right) \cdots dx_2 \right) dx_1$$

Man kann sich auch noch klarmachen, daß es in der letzten Formel gar nicht auf die Reihenfolge der Integrale ankommt. Dies folgt leicht aus der einfach zu beweisenden Tatsache, daß

$$\int f = \int \pi \cdot f$$

gilt, wenn $\pi$ eine Permutation (in $S_n$) ist, und

$$f_\pi(x_1, \cdots, x_n) = f(x_{\pi(1)}, \cdots, x_{\pi(n)})$$

gesetzt ist.

*Beispiel.* Wir berechnen das Volumen $V_n$ der Einheitskugel

$$B^n = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x^2, + \cdots + x_n^2 \leq 1\}.$$

Im nächsten Abschnitt werden wir sehen, daß $B^n$ tatsächlich meßbar ist (d.h. $\chi_{B^n} \in Z_n$ gilt). Zur Berechnung setzen wir

$$V_n(r) = \mathrm{vol}\left(\{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \cdots + x_n 2 \leq r\}\right).$$

Man macht sich leicht direkt anhand der definition von $\int \chi_{B^n}$ klar, daß

$$V_n(r) = r^{n/2} V_n$$

(siehe dazu aber auch den übernächsten Abschnitt). Damit hat man dann

$$\begin{aligned} V_n &= \int \chi_{B^n} = \int_{-1}^{+1} \left( \int \chi_{\{(x_2,\cdots,x_n):\sum_{i=2}^n x_i^2 \leq 1-x_1^2\}} \right) dx_1 \\ &= \int_{-1}^{+1} V_{n-1}(1-x_1^2)\, dx_1 = V_{n-1} \int_{-1}^{+1} (1-x_1^2)^{\frac{n-1}{2}} dx. \end{aligned}$$

Nun ist

$$\int_{-1}^{+1}(1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}dt = 2\int_0^1(1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}dt = \int_0^1(1-u)^{\frac{n-1}{2}}u^{-\frac{1}{2}}du,$$

wo wir $t^2 = u$ (also $2t\,dt = du$) gesetzt haben. Das letzte Integral wird in der Literatur mit $B(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2})$ bezeichnet.

Betafunktion

Ganz allgemein ist die *Betafunktion* definiert durch

$$B(z,w) = \int_0^1(1-t)^{z-1}t^{w-1}dt(z,w>0).$$

Es gilt die Formel (Übungsaufgabe)

$$B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)},$$

wo

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^z\frac{dt}{t} \qquad (z>0)$$

Gammafunktion

die *Gammafunktion* bezeichnet. Man kann zeigen (Übungsaufgabe)

$$\Gamma(z) = (z-1)\Gamma(z-1),\ \Gamma(1) = 1;$$

insbesondere folgt hieraus $\Gamma(n) = (n-1)!$ für $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$.

Zurück zum Problem der Berechnung von $V_n$ finden wir also

$$B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n+2}{2})}.$$

Damit wird

$$\begin{aligned} V_n &= \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n+2}{2})}V_{n-1} \\ &= \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n+2}{2})}\cdot\frac{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}\cdot V_{n-2} = \dots \\ &= \Gamma(\frac{1}{2})^{n-1}\cdot\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})\cdot\Gamma(\frac{n}{2})\cdots\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{n+2}{2})\cdot\Gamma(\frac{n+1}{2})\cdots\Gamma(\frac{4}{2})}\cdot V_1 \\ &= \Gamma(\frac{1}{2})^n/\Gamma(\frac{n+2}{2}). \end{aligned}$$

Wir werden weiter unten sehen, daß

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$$

Damit haben wir schließlich

$$\mathrm{vol}((x,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n | x_1^2+\cdots+x_n^2 = 1) = \frac{1}{\Gamma(\frac{n+2}{2})}\pi^{\frac{n}{2}}$$

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{vol}(B^n)$ | 2 | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{\pi^2}{2}$ | $\frac{15\cdot\pi^2}{8}$ | $\frac{\pi^3}{6}$ |

Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel $B_n$

## 6.3 Lebesgue- und Jordan-Nullmengen

Bisher haben wir nur eine relativ abstrakte Definition des Bereiches $Z_n$ der auf $\mathbb{R}^n$ integrierbaren Funktionen. Abgesehen von konstanten Funktionen und *Treppenfunktionen* haben wir im Grunde noch keine integrierbare Funktion als solche erkannt. In diesem Abschnitt geben wir praktisch zu handhabende Kriterien für die Integrierbarkeit.

Lebesgue-Nullmenge

**Definition.** Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *(Lebesgue-)Nullmenge*, falls es zu jedem $\epsilon < 0$ abgeschlossenen Quader $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^n$ gibt, so daß

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n, \qquad \sum_{n=u}^{\infty} \mathrm{vol}(A_n) < \epsilon.$$

Jordan-Nullmenge

Die Teilmenge $A$ heißt *Jordan-Nullmenge*, falls zu jedem $\epsilon > 0$ <u>endlich</u> viele abgeschlossene Quader $A_1, \cdots, A_N$ existieren, so daß

$$A = \bigcup_{n=1}^{N} A_n, \qquad \sum_{n=1}^{N} \mathrm{vol}(A_n) < \epsilon.$$

*Beispiel.* Die Menge $R$ der rationalen Zahlen im Intervall $[0,1]$ ist eine Lebesgue-Nullmenge. In der Tat ist $R$ abzählbar, d.h. es gibt eine bijektive Abbildung $a : \mathbb{N} \to R$. Wählen wir zu $a(n)$ den abgeschlossenen Quader

$$A(n) := [a(n) - \epsilon/2^n, a(n) + \epsilon/2^n],$$

wo $0 < \epsilon \leq 1$ fest gewählt ist, so ist $(A(n))_n$ eine Überdeckung von $R$ und

$$\sum_{n\geq 0} \mathrm{vol}(A(n)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n} = 2\epsilon$$

Dagegen ist $R$ nicht Jordan-Nullmenge. Ist nämlich $\mathbb{R} \subseteq A_1 \cup \cdots \cup A_n$, wo $A_i$ ein abgeschlossenes Intervall ist, dann ist sogar $[0,1] \subseteq A_1 \cup \cdots \cup A_n$: Wäre $x \in [0,1]$ in keinem $A_n$ enthalten, so gäbe es eine offene Umgebung von $x$, die in keinem $A_n$ enthalten ist (denn $[0,1] \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_n)$ ist offen), was aber der Tatsache widerspricht, daß $Q$ in $\mathbb{R}$ dicht liegt. Schließlich überlegt man sich leicht, daß $[0,1] \subseteq A_1 \cup \cdots \cup A_n$ die Ungleichung

$$\sum_{n=1}^{N} \mathrm{vol}(A_n) \geq 1$$

impliziert.

*Bemerkung.* In der Definition von Lebesgue- und Jordan-Nullmengen kann man das Wort *abgeschlossener* Quader durch *offener* Quader ersetzen In der Tat, ist $A$ offener Quader, so hat man ja

$$\mathrm{vol}(A) = \mathrm{vol}(\overline{A}).$$

**Satz.** *Eine kompakte Lebesgue-Nullmenge ist schon Jordan-Nullmenge.*

*Beweis.* Sei $A$ kompakte Lebesgue-Nullmenge, sei $\epsilon > 0$ . Dann gibt es eine Überdeckung $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $A$ mit offenem Quader, so daß $\sum \mathrm{vol}(A_n) < \epsilon$. Da $A$ kompakt ist, überdecken aber schon endlich viele der $A_n$ die Menge $A$. □

Charakterisierung der integrierbaren Funktionen

**Satz.** *Sei* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *eine beschränkte Funktion und* $\mathrm{supp}(f)$ *beschränkt. Dann ist* $f$ *integriebar, genau dann, wenn die Menge*

$$\mathrm{Un}(f) := \{x \in \mathbb{R}^n : f \textit{ist unstetig bei } x\}$$

*der Unstetigkeitsstellen von* $f$ *eine Lebesgue-Nullmenge ist.*

Wir werden den Satz weiter unten beweisen, ziehen aber zunächst einige Folgerungen.

**Korollar.** *Sei* $C \subseteq \mathbb{R}^n$ *beschränkt. Dann ist* $C$ *meßbar, genau dann wenn* $\partial C$ *eine Lebesgue-Nullmenge ist.*

*Beweis.* Man hat sich nach dem letzten Satz nur zu überlegen, daß

$$\mathrm{Un}(\chi_C) = \partial C.$$

Dies ist in der Tat wahr: Ist $x \in \mathbb{R}^n \backslash \partial C$, so gibt es eine offene Umgebung von $x$, auf der $\chi_C$ konstant ist (also gleich 0 oder 1), und die ganz in $\mathbb{R}^n \backslash \partial C$ gelegen ist. Ist dagegen $x \in \partial C$, so enthält jede offene Umgebung von $x$ einen Punkt $a \in C$ und einen Punkt $b \notin C$, d. Punkte $a, b$ mit $\chi_C(a) = 1$ und $\chi_C(h) = 0$ □

**Korollar.** *Sei* $C \subseteq \mathbb{R}^n$ *meßbar, sei* $f : C \to \mathbb{R}$ *beschränkt und*

$$\mathrm{Un}(f) := \{x \in C | f \textit{ unstetig beix}\}$$

*eine Lebesgue-Nullmenge. Dann ist* $f$ *integrierbar über* $C$.

*Beweis.* Es ist

$$\mathrm{Un}(f_C) = \mathrm{Un}(f) \cup \partial C$$

(Übungsaufgabe). Die endliche Vereinigung von Lebesgue-Nullmengen ist aber offenbar wieder eine Lebesgue-Nullmenge. □

Die letzte Aussage im Beweis gilt sogar für abzählbare Vereinigungen, wie wir weiter unten sehen werden. Wir kommen nun zum Beweis der Charakterisierung der integrierbaren Funktionen. Hierzu benötigen wir einige Lemmata. Zunächst haben wir die Natur der Unstetigkeitsstellen besser zu erfassen.

Oszillation einer Funktion

**Definition.** Sei $A \in R^n$ und $f : A \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Für $a \in A$ ist die *Oszillation von $f$ bei $a$* definiert als

$$O(f,a) := \lim_{\delta\to 0}\big(\sup_{\|x-a\|<\delta} f(x) - \inf_{\|x-a\|<\delta} f(x)\big).$$

*Bemerkung.* Der Limes existiert offenbar, da

$$M(f,a,\delta) - m(f,a,\delta)$$

monoton abnehmend in $\delta$ ist, wo

$$\begin{aligned} M(f,a,\delta) &:= \sup_{\|x-a\|\subset\delta} f(x) \\ m(f,a,\delta) &:= \inf_{\|x-a\|<\delta} f(x) \end{aligned}$$

gesetzt ist. Er hängt offenbar auch nicht von speziellen Wahl der hierbei auftretenden Norm $\|\cdot\|$ auf dem $\mathbb{R}^n$ ab.

**Satz.** *Die beschränkte Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ ist bei $a$ stetig genau dann, wenn $O(f,a) = 0$.*

*Beweis.* Sei $f$ stetig bei a. Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so daß für alle $x \in A$ gilt:

$$\|x-a\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} M(a,f,\delta) &\leq f(a) + \epsilon, \\ m(a,f,\delta) &\geq f(a) - \epsilon, \end{aligned}$$

also $M(a,f,\delta) - m(a,f,\delta) \leq 2\epsilon$. Da dies für jedes $\epsilon > 0$ gilt, haben wir $O(f,a) = 0$. Die Umkehrung ist ähnlich. Wir lassen sie als Übungsaufgabe. □

**Satz.** *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, $f : A \to \mathbb{R}$ beschränkt und $\epsilon > 0$. Dann ist die Menge $\{x \in A : O(f,x) \geq \epsilon\}$ abgeschlossen.*

*Beweis.* Sei

$$B := \mathbb{R}^n \setminus \{x \in A : O(f,x) \geq \epsilon\}.$$

Wir müssen zeigen, daß $B$ offen ist. Ist $a \in B$ und $a \notin A$, so gibt es eine offene, ganz in $B$ enthaltene Umgebung von $a$, da $A$ abgeschlossen ist.

Ist dagegen $a \in B$ und $a \in A$, so gibt es jedenfalls ein $\delta > 0$ mit

$$M(f, a, \delta) - m(f, a, \delta) < \epsilon.$$

Dann ist aber schon $U_\delta(a) \subseteq B$ (wo die $\delta$-Umgebung $U_\delta(a)$ bezüglich irgendeiner Norm gebildet ist). Ist nämlich $y \in U_\delta(a)$, so gibt es ein $\delta_1 > 0$ mit $U_{\delta_1}(y) \subseteq U_\delta(a)$, und somit

$$M(f, y, \delta_1) - m(f, y, \delta_1) < \epsilon,$$

also jedenfalls $O(y, f) < \epsilon$. □

**Lemma.** *Es sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Familie von Lebesgue-Nullmengen. Dann ist auch $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ eine Lebesgue-Nullmenge.*

*Beweis.* Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $(Q_{n,k})_{\in\mathbb{N}}$ eine Überdeckung von $A_n$ mit abgeschlossenen Quadern $Q_{n,k}$, so daß

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{vol}(Q_{n,k}) < \frac{\epsilon}{2^n}.$$

Ist nun $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ eine Bijektion, (in der Analysis I wurde gezeigt, daß $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar ist, d.h. daß solch eine Bijektion tatsächlich existiert), dann ist $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $V_n := Q_{\varphi_1(n),\varphi_2(n)}$ (wo $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$) eine Überdeckung von $\bigcup A_n$, und es gilt

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{vol}(V_n) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} U_{n,k} = 2\epsilon.$$

□

*Beweis des Hauptsatzes.* Sei $Q$ ein abgeschlossener Quader, der $\mathrm{supp}(f)$ enthält. Für $\epsilon > 0$ setzen wir

$$B_\epsilon = \{x \in Q : O(f, x) \geq \epsilon\}.$$

Dann ist $B_\epsilon$ abgeschlossen und beschränkt, also kompakt. Ferner ist

$$B := \{x : \text{f unstetig bei x}\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{\frac{1}{n}}.$$

Wir nehmen zunächst an, daß $f$ integrierbar ist. Es genügt, zu zeigen, daß jedes $B_{1/n}$ Lebesgue-Nullmenge ist. (Wir zeigen sogar, daß es Jordan-Nullmenge ist, was aber wegen der Kompaktheit ohnehin äquivalent ist.)

Sei $\epsilon > 0$, und sei dazu $P$ eine Partition von $Q$, so daß

$$Q_P(f) - U_P(f) < \frac{\epsilon}{n}.$$

Sei $P_0$ die Menge der $S \in P$, die $B_{\frac{1}{n}}$ schneiden. Dann ist $B_{\frac{1}{n}} \subseteq \bigcup_{S \in P_0} S$. Für $S \in P_0$ haben wir

$$\sup_S f - \inf_S f \geq \frac{1}{n}$$

(da ja $O(f,a) \geq \frac{1}{n}$ für mindetens ein $a \in S$). Daher gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{n} \sum_{S \in P_0} \mathrm{vol}(S) &\leq \sum_{S \in P_0} [\sup_S f - \inf_S f] \cdot \mathrm{vol}(S) \\ &\leq \sum_{S \in P} [\sup_S f - \inf_S f] \cdot \mathrm{vol}(S) < \frac{\epsilon}{n},\end{aligned}$$

und daher also $\sum_{S \in P_0} \mathrm{vol}(S) < \epsilon$ .

Wir nehmen nun umgekehrt an, daß $B$ Lebesgue-Nullmenge ist. Sei $\epsilon > 0$. Da $B_\epsilon \subseteq B$, ist $B_\epsilon$ Lebesgue-Nullmenge, und da es kompakt ist, sogar Jordan-Nullmenge. Also gibt es abgeschlossene Quader $S_1, \ldots, S_n$, deren Inneres $B_\epsilon$ überdeckt, und so daß $\sum_{i=1}^n \mathrm{vol}(S_i) < \epsilon$.

Wir wählen nun eine Partition von $Q$, so daß für jedes $S \in P$ genau eine der beiden folgenden Aussagen zutrifft:

1. $S \subseteq S_i$ für ein $i$.
2. $S \cap B_\epsilon = \emptyset$

Sei $|f(x)| < M$ für $x \in Q$. Dann haben wir für die Summe über die $S \in P$ vom Typ 1:

$$\sum_{S \text{ Typ } 1} [\sup_S(f) - \inf_S(f)] \cdot \mathrm{vol}(S) < 2M \sum_{i=1}^n \mathrm{vol}(S_i) < 2M\epsilon$$

Ist dagegen $S$ vom Typ 2, dann ist $O(f,x) < \epsilon$ für alle $x \in S$. Dann gibt es eine Partition $P_S$ von $S$, so daß

$$\sum_{T \in P_S} [\sup_T(f) - \inf_T(f)] \cdot \mathrm{vol}(T) < \epsilon \cdot \mathrm{vol}(S)$$

(Beweis weiter unten). Sei $P_2$ die Vereinigung aller $P_S$ mit $S$ vom Typ 2 und

$P_1$ die Vereinigung aller $S$ vom Typ 1. Wir haben dann

$$\begin{aligned} O_{P_1 \cup P_2}(f) - U_{P_1 \cup P_2}(f) &= \left( \sum_{S \in S_1} + \sum_{S \in S_2} \right) [\sup_S(f) - \inf_S(f)] \cdot \mathrm{vol}(S) \\ &< 2M\epsilon + \sum_{S \in S_2} \epsilon \cdot \mathrm{vol}(S) \\ &\leq 2M\epsilon + \epsilon \, \mathrm{vol}(Q). \end{aligned}$$

Da $\epsilon$ beliebig war, sehen wir so, daß

$$Q_{P_1 \cup P_2}(f) = U_{P_1 \cup P_2}(f),$$

also $f$ integrierbar ist.

Es bleibt die Existenz von $P_S$ zu beweisen: Zu jedem $x \in S$ gibt es einen abgeschlossenen Quader $S_x$, der $x$ im Inneren enthält, so daß

$$\sup_{S_x}(f) - \inf_{S_x}(f) < \epsilon.$$

Da $S$ kompakt ist, wird $S$ schon von endlich vielen der $S_x$, etwa $S_{x_1}, \cdots, S_{x_n}$ überdeckt. Sei $P_S$ nun eine Partition von $S$, so daß jeder Teilquader von $P_S$ schon in einem der $S_{x_i}$ enthalten ist. Dann ist

$$O_{P_S}(f) - U_{P_S}(f) = \sum_{T \in P} [\sup_T(f) - \inf_T(f)] \, \mathrm{vol}(T) < \epsilon \cdot \mathrm{vol}(S),$$

wie zu beweisen war □

### 6.3.1 Der Integrierbarkeitsbegriff aus der Analysis I

In der Analysis I hatten wir zu gegebenem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ den Vektorraum $S(a, b)$ aller Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ betrachtet, die man als Grenzwert im Sinne der gleichmäßigen Konvergenz einer Folge von Treppenfunktionen erhält. Genauer ist $f \in S(a, b)$ genau dann, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Treppenfunktion $t : [a, b] \to \mathbb{R}$ gibt, sodaß

$$\sup\{|f(x) - t(x)| : x \in [a, b]\} < \epsilon.$$

Dabei bezeichnen wir als Treppenfunktion auf $[a, b]$ jede Funktion $t$, zu der es eine Zerlegung von $[a, b]$ in endlich viele paarweise disjunkte Intervalle (offen, abgeschlossen oder halboffen) gibt, sodaß $t$ auf jedem dieser Intervalle konstant ist. Für Funktionen $f$ in $S(a, b)$ hatten wir dann das Integral $\int_a^b f$ erklärt. (Nämlich als Limes der Integrale einer gegen $f$ gleichmäßig konvergierenden Folge von Treppenfunktionen, wobei die Integrale von Treppenfunktionen in naheliegender Weise erklärt sind)

*Übung.* Man zeige, daß jede Funktion in $S(a,b)$ auf dem Intervall $[a,b]$ Riemann-integrierbar ist, d.h. integrierbar im Sinne unserer Definition aus dem Abschnitt 6.1, und daß das Intgral aus 6.1 eine Fortsetzung des Integrals aus der Analysis I ist. (Man kann die Bedingungen in der Definition der Integrierbarkeit direkt verifizieren.)

Allerdings ist es nicht so, daß jede auf $[a,b]$ (Riemann-)integrierbare Funktion gleichmäßig durch Treppenfunktionen approximiert werden kann. Ein Gegenbeispiel konstruiert man sich leicht mittels einer Funktion mit abzählbar vielen Unstetigkeitsstellen. Man kann die Funktionen in $S(a,b)$ folgendermaßen charakterisieren:

**Satz.** *Eine auf dem abgschlossenen Intervall $[a,b]$ erklärte Funktion ist genau dann in $S(a,b)$ gelegen, wenn für jeden Punkt $c \in [a,b]$ die Grenzwerte*

$$\lim_{\substack{x\to c,\\ x>c}} f(x), \qquad \lim_{\substack{x\to c,\\ x<c}} f(x)$$

*existieren und endlich sind.*

Wir wollen den Satz hier nicht beweisen, sondern lassen ihn als Übungsaufgabe für ambitionierte Studenten. Wir geben aber einen Hinweis: Für die schwierige Richtung, d.h. für den Nachweis, daß die Existenz der rechts-und linksseitigen Limites die gleichmäßige Approximierbarkeit durch Treppenfunktionen impliziert, beweise man zunächst, daß die Menge

$$S_\delta(I,f) := \{x \in [a,b] : \forall \epsilon > 0\ \exists x' : |x - x'| < \epsilon\ \&\ |f(x) - f(x')| > \delta\}$$

für jedes $\delta > 0$ endlich ist[1].

## 6.4 Die Transformationsformel

Das mächtigste Hilfsmittel zur Berechnung von Mehrfachintegralen ist die Transformationsformel. Wir werden sie hier formulieren, aber auf einen Beweis verzichten. Statt dessen werden wir an Beispielen ihre Anwendung vorexerzieren. Die hier ausgewählten Beispiele werden sie vielleicht auch plausibel erscheinen lassen. Wer den exakten und ausführlichen Beweis sehen möchte, findet diesen in [Spivak] oder auch - in etwas abgeschwächter Form in [Lang].

**Satz.** *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, und $g \in \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R}^n)$. Es sei $A$ eine meßbare Menge, deren Abschluß $\overline{A}$ in $U$ enthalten ist, und so daß $g$ auf dem Inneren von*

Transformationsformel

[1] Ich danke Georg Illies, der mir den oben angeführten Satz mitteilte und den Beweis skizzierte.

*A $\mathcal{C}^1$-invertierbar ist. Ist dann $f$ auf $g(A)$ integrierbar, so ist $f \circ g$ auf $A$ integrierbar, und es gilt*

$$\int_{g(A)} f = \int_A f \circ g \, |det(Dg)|.$$

*Bemerkung.* Eine Abbildung $g \in \mathcal{C}^1(V, \mathbb{R}^n)$ auf einer offenen Menge $V \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt $\mathcal{C}^1$-invertierbar, falls $g(V)$ offen und $g : V \to g(V)$ bijektiv ist, und falls $g^{-1} \in \mathcal{C}^1(g(V), \mathbb{R}^n)$.

Die Menge $g(A)$ (aus dem Satz) ist meßbar.Es gilt nämlich

**Satz.** *Sei $A \in \mathbb{R}^n$ meßbar. Der Abschluß $\overline{A}$ sei in einer offenen Menge $U$ enthalten, $g : U \to R^n$ sei $\mathcal{C}^1$ und auf dem Inneren von $A$ $\mathcal{C}^1$-invertierbar. Dann ist $g(A)$ meßbar.*

*Beweis.* Es ist $g(A^\circ) \subseteq g(A) \subseteq g(\overline{A})$, und $g(\overline{A})$ ist kompakt (denn $\overline{A}$ ist beschränkt und abgeschlossen, und $g$ ist stetig). Es folgt $\partial g(A) \subseteq g(\partial A)$ (denn $g(A^\circ)$ ist nach Voraussetzung offen und $g(A) = g(A^\circ) \cup g(\partial A)$.) Wir lassen es als Übungsaufgabe zu zeigen, daß $g(\partial A)$ eine Jordan-Nullmenge ist. (Man benutze, daß $\partial A$ eine Jordan-Nullmenge ist, und daß zu jedem Punkt $a \in U$eine Umgebung $V$ existiert, und eine Konstante $C$, so daß

$$\|g(x) - \varphi(y)\| \leq C \cdot \|x - y\| \qquad (x, y \in V).$$

Warum?) $\square$

Es ist noch interessant anzumerken, daß die Menge aller $a \in A$ f"ur die $|\det Dg(a)| = 0$ gilt, eine Lebesgue-Nullmenge ist. Es gilt nämlich:

Satz von Sard

**Satz.** *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $g \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^n)$. Dann ist*

$$\{x \in U : \det Dg(x) = 0\}$$

*eine Lebesgue-Nullmenge.*

*Bemerkung.* Der eigentliche Satz von Sard, wie er in der Literatur vorkommt, sagt mehr aus. Der hier formulierte Teil ist leicht zu beweisen und kann als Übungsaufgabe betrachtet werden.

Wir diskutieren nun einige bemerkenswerte Spezialfälle der Transformationsformel. Es sei $M \in GL(n, \mathbb{R})$. Dann definiert $g(x) = M \cdot x$ eine Abbildung $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vom Typ $\mathcal{C}^\infty$. Da $g$ linear ist, haben wir $Dg(x) = M$, also

$$\det Dg(x) = \det(M).$$

Ferner ist $g$ global invertierbar, und die Umkehrabbildung (als lineare Abbildung) ist wieder vom Typ $\mathcal{C}^\infty$. Ist daher $A \subseteq \mathbb{R}^n$ meßbar und $f$ integrierbar über $A$, so ist auch $M \cdot A = \{M \cdot x : x \in A\}$ meßbar und $x \to f(M \cdot x)$ integrierbar über $M \cdot A$, und es gilt

$$\int_{M \cdot A} f(y)\,dy = |\det(M| \cdot \int_A f(Mx)\,dx, \quad \operatorname{vol}(M \cdot A) = |\det(M)| \operatorname{vol}(A).$$

Bemerkenswerte Spezialfälle sind

$$\int_{r \cdot A} f(y)\,dy = r^n \int_A f(r \cdot x)\,dx,$$

wo $r > 0$ eine reelle Zahl ist. Insbesondere

$$\operatorname{vol}(r \cdot A) = r^n \operatorname{vol}(A).$$

Des weiteren

$$\int_{-A} f(y)\,dy = \int_A f(-x)\,dx, \qquad \operatorname{vol}(-A) = \operatorname{vol}(A).$$

Ist $\pi \in S_n$, und $f$ integrierbar (auf dem $\mathbb{R}^n$), so hat man

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n)\,dx_1 \cdots dx_n = \\ = &\int_{\mathbb{R}^n} f(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)})\,dx_1 \cdots dx_n \end{aligned}$$

In der Tat ist ja

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_{\pi(1)} \\ \vdots \\ x_{\pi(n)} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

eine lineare Abbildung. Die zugeordnete Matrix $M$ ist

$$M = \left(e_{\pi^{-1}(1)} \dots e_{\pi^{-1}(n)}\right).$$

Offenbar gilt $\det(M) = \pm 1$ (Welches Vorzeichen genau?)

Wichtig ist auch noch, die Translationsinvarianz des Integrales. Ist $b \in \mathbb{R}^n$, so gilt

$$\int_{b+A} f(y)\,dy = \int_A f(b+x)\,dx, \qquad \operatorname{vol}(b+A) = \operatorname{vol} A.$$

In der Tat folgt dies aus der Transformationsformel mit $g(x) = x + b$ (und $Dg(x) = \mathrm{id}$). Man kann die Translationsinvarianz allerdings auch leicht unmittelbar aus der Definition des Integrales ablesen. Ein Spezialfall der eben angestellten Überlegungen ist der folgende: Bezeichnet $W$ den Einheitswürfel im $\mathbb{R}^n$, also

$$W = [0,1] \times \cdots \times [0,1]$$

so ist natürlich $\mathrm{vol}(W) = 1$. Sind nun $a_1, \dots, a_n$ linear unabhängige Vektoren des $\mathbb{R}^n$, und setzt man

$$M := (a_1 a_2 \cdots a_n)$$

so ist

$$M \in GL(n, \mathbb{R})$$

und

$$M \cdot W = PP(a_1, \dots a_n) := \{x, a, + \cdots + x_n a_n | 0 \le x_1, \dots, x_n \le 1\}$$

Man bezeichnet $M \cdot W$ auch als das von $a_1, \dots, a_n$ aufgespannten *Parallelepiped*.Man hat nach den angestellten Überlegungen dann also

$$\mathrm{vol}(PP(a_1 \dots a_n)) = |\det(a_1 a_2 \dots a_n)|.$$

Parallelepiped

Man überlegt sich leicht, daß diese Formel auch richtig bleibt, wenn die $a_1, \dots, a_n$ linear abhängig sind (dann sind beide Seiten gleich 0). Diese Identität ist fundamental, denn sie tritt wohl in jedem Beweis der Transformationsformel mehr oder weniger explizit auf. Es ist eine nette Übungsaufgabe in Elementar-Geometrie, diese Formel direkt zu beweisen, etwa für den $\mathbb{R}^2$. In der Tat liegt der Ursprung des Begriffs der Determinante in dieser Formel. Wir schließen den Abschnitt mit einigen konkreten Anwendungen der Transformationsformel.

*Beispiel.* Wir wollen beweisen daß

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Die zweite Identität erhält man mittels der Substitution $t = x^2, dt = 2xdx$. Zum Nachweis der dritten berechnen wir das Quadrat des fraglichen Integrales (man beachte, daß es positiv ist):

$$\begin{aligned} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 &= \left( 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = 4 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_0^\infty e^{-y^2} dy \\ &= 4 \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy. \end{aligned}$$

Das rechts stehende Doppelintegral kann man nach dem Satz von Fubini als Integral über einen zweidimensionalen Bereich auffassen, genauer als

$$\lim_{N \to \infty} 4 \int_{[0,N] \times [0,N]} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

Polar-
koordinaten

(Man ersetze zur Verifikation in den angestellten Überlegungen $\int_0^{+\infty}$ durch $\lim_N \int_0^N$). Wir gehen nun zu *Polarkoordinaten* über, d.h. wir führen eine

Integraltransformation mittels der Funktion

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad g(r, \vartheta) = \begin{pmatrix} r\cos\vartheta \\ r\sin\vartheta \end{pmatrix}$$

durch. Ist $x = (x_1, x_2)^t$ ein Vektor im $\mathbb{R}^2$, so gibt es genau ein $r < 0$ und ein $\varphi \in [0, 2\pi]$ mit

$$x = (r\cos\vartheta, r\sin\vartheta)^t.$$

In der Tat, es ist

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

und da $x/r$ den (euklidischen) Betrag 1 hat, gibt es genau ein $\vartheta \in [0, 2\pi]$ mit $x_1/r = \cos\vartheta$ und $x_2/r = \sin\vartheta$ (vgl. Analysis I). Also ist die Abbildung $g$ surjektiv, und es gibt sehr viele offene Mengen $U$, so daß die Einschränkung von $g$ auf $U$ dann $\mathcal{C}^1$-invertierbar ist. Wir berechnen

$$Dg(r, \vartheta) = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -r\sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & r\cos(\vartheta) \end{pmatrix}, \qquad \det Dg(r, \vartheta) = r.$$

Gehen wir nun in $\int_{\mathbb{R}^2_{>0}} e^{-(x^2+y^2)}\, dxdy$ zu Polarkoordinaten über (wir lassen die Details mit dem Limes als Übungsaufgabe), so erhalten wir

$$\int_{\mathbb{R}^2_{>0}} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \int_{\mathbb{R}_{>0}\times(0_1\frac{\pi}{2})} e^{-r^2} r\, drd\vartheta = \frac{-1}{2} e^{-r^2}\Big|_0^\infty \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Faßt man zusammen, so erhält man die behauptete Identität.

*Beispiel.* Wir berechnen das Volumen des Kreises vom Radius $R$ mittels Polarkoordinaten. Es ist

$$B^2(R) := \{(x, y)^t | x^2 + y^2 \leq 1\} = g([0, 1] \times [0, 2\pi]),$$

wo $g(r, \vartheta) = (r\cos\vartheta, r\sin\vartheta)^t$ wie oben. Demnach ist

$$\mathrm{vol}(B^2(R)) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r\, drd\vartheta = \int_0^1 2\pi r\, dr = \pi R^2.$$

Die vorletzte Identität ist bemerkenswert. Sie besagt, daß $\mathrm{vol}(B^2(R))$ gleich der *Summe* der Umfänge der Kreise vom Radius 0 bis $R$ ist. In der Tat, denkt man sich $B^2(R)$ aus konzentrisch um den Ursprung angeordneten Schnüren zusammengesetzt, rektifiziert man diese und stapelt sie aufeinander, so erhält man ein rechtwinkliges Dreieck mit Katheten der Länge $2\pi R$ und $R$. Und dessen Inhalt ist gerade $\pi R^2$.

*Beispiel.* In diesem Beispiel betrachten wir Rotationskörper. Ist $F$ eine Fläche in der $(t,z)$-Ebene und dreht man diese entlang einer Kreislinie in der $x$-$y$-Ebene um die $z$-Achse, so wird hierdurch ein Körper erzeugt, der invariant ist unter Rotationen um die $z$-Achse. Damit es keine Überschneidungen gibt, setzen wir dabei voraus, daß $F$ in der Halbebene $t > 0$ gelegen ist.

Für das Volumen eines Rotationskörpers gibt es eine einfache Formel. Dazu definieren wir zunächst den Schwerpunkt von $F$ als

$$\mathrm{SP}(F) := \int_F (t,z)^t \, dtdz / \operatorname{vol}(F).$$

Hierbei nehmen wir natürlich an, daß $F$ meßbar ist.

*Satz. Sei $F \subseteq \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$ eine meßbare Menge, sei $a = (a_1, a_2)^t$ der Schwerpunkt von $F$. Schließlich sei*

$$M = \{(t \cdot u, z)^t \in \mathbb{R}^3 : (t,z)^t \in F, u_1^2 + u_2^2 = 1\},$$

*(wo wir $u = (u_1, u_2)^t$ gesetzt haben). Dann gilt*

$$\operatorname{vol}(M) = 2\pi a_1 \cdot \operatorname{vol}(F).$$

*Beweis.* Wir wenden den Satz von Fubini und die Transformationsformel an, letztere. indem wir $t \cdot u = (t\cos\vartheta, t\sin\vartheta)^t$ setzen. Damit erhalten wir nacheinander:

$$\begin{aligned}
\int \chi_M &= \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}^2} \chi_M(x,y,z)\, dx\, dy \right) dz \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}_{>0} \times (0,2\pi)} \chi_M(t\cos\vartheta, t\sin\vartheta, z)\; t\, dt\, d\vartheta \right) dz \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}_{>0} \times (0,2\pi)} \chi_F(t,z)\; t\, dt\, d\vartheta \right) dz \\
&= 2\pi \int_{\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}} \chi_F(t,z)\, t\, dt\, dz \\
&= 2\pi \operatorname{vol}(F) \cdot a_1 \cdot
\end{aligned}$$

□

Ein spezieller Rotationskörper ist der Torus

$$T := \{(tu,z) | u_1^2 + u_2^2 = 1 \;, (t-1)^2 + z^2 \leq R\},$$

wo$R < 1$ gewählt ist. Es ist plausibel (und leicht zu verifizieren) daß der Schwerpunkt von $\{(t,z) | (t-1)^2 + z^2 \leq R\}$ gerade $(1,0)$ ist. Wir erhalten also

$$\operatorname{vol}(T) = 2\pi^2 R^2.$$

# Anhang A

# Aufgaben zu den einzelnen Kapiteln

Dies ist eine Sammlung von Aufgaben, thematisch gemäß dem Stoff der Vorlesung gegliedert. Die meisten dieser Aufgaben sind nicht lediglich zum einfachen Einüben der Begriffe aus der Vorlesung gedacht, sondern sollen dazu anregen, den Stoff der Vorlesung im Selbsstudium in verschiedene Richtungen hin zu vertiefen. Der Erfolg (oder eher Mißerfolg) beim Lösen der Aufgaben sollte also keinesfalls als Maßstab für die Beherrschung des Stoffes der Analysis II genommen werden.

Da die Aufgaben teils aus einer anderen Vorlesung übernommen wurden, kann es in den Notationen zu kleinen Unstimmigkeiten kommen: so wird in den Aufgaben zum Beispiel der $\mathbf{R}^n$ als Raum von *Zeilen*vektoren betrachtet, und nicht, wie in der Vorlesung, als Raum von Spaltenvektoren. Der erste Abschnitt über die Stammfunktionen rationaler Funktionen gehört an sich nicht hier hin. Ich habe ihn aber als kleine Ergänzung zur Theorie der Integration aus der Analysis I hier mit aufgenommen.

## A.1 Stammfunktionen rationaler Funktionen

**1.** Ein relles Polynom heißt *(reell-)irreduzibel*, falls es nicht konstant ist und nicht als Produkt zweier nicht-konstanter reeller Polynome geschrieben werden kann. Zeigen Sie:

(i) Die reell-irreduziblen Polynom sind bis auf Multiplikation mit einer Konstanten genau die Polynome von der Gestalt $x - \rho$ oder $x^2 + ax + b$ mit $a^2 - 4b < 0$.

(ii) Jedes Polynom $g \neq 0$ besitzt eine eindeutig bestimmte Darstellung

$$(*) \qquad g = c \cdot p_1^{n_1} \cdots p_r^{n_r},$$

wo $c$ eine Konstante ist, die $p_i$ paarweise verschiedene, irreduzible, normierte Polynome und die $n_i$ positive ganze Zahlen bedeuten. (Hinweis: Sie dürfen den Fundamentalsatz der Algebra benützen, wonach jedes (komplexe) Polynom bis auf Multiplikation mit einer Konstanten als Produkt von Polynomen $x-\rho$ ($\rho \in \mathbf{C}$) geschrieben werden kann.)

**2.** Es bezeichnen $f$ und $g$ zwei Polynome, deren *Primzerlegungen* $(*)$ kein gemeinsames irreduzibles Polynom enthalten. Zeigen Sie, daß es Polynome $h_i$ gibt, sodaß $1 = h_1 \cdot f + h_2 \cdot g$ gilt. (Hinweis: Betrachten Sie die Menge $I$ aller Summen $h_1 \cdot f + h_2 \cdot g$, wobei die $h_i$ alle reellen Polynome durchlaufen; es bezeichne $c$ ein Polynom in $I$ mit minimalem Grad; überlegen Sie sich, daß jedes Polynom in $I$ ein Vielfaches von $c$ ist, und daß daher $c$ eine Konstante sein muß.)

**3.** Sei $p$ ein reell-irreduzibles Polynom (vgl. die vorstehenden Aufgaben), $c$ ein Polynom mit $\text{grad}(c) < \text{grad}(p)$ und $n$ eine positive ganze Zahl. Finden Sie eine Stammfunktion von $c/p^n$. (Hinweis: Nach einer geeigneten Variablensubstitution genügt es, die Fälle $c(x)/p(x)^n = 1/x^n$, $= 1/(x^2+1)^n$ bzw. $= x/(x^2+1)^n$ zu betrachten.)

**4.** Finden Sie eine Stammfunktion von $\dfrac{x(x^7+x^2-2)}{(x^3-1)^2}$.

**5.** Zeigen Sie, daß jede rationale Funktion $f(x)$ eine *reelle Partialbruchzerlegung* besitzt, d.h. in der Gestalt

$$f(x) = f_0(x) + \sum_{i=1}^{r} \left( \frac{c_{i,1}}{p_i} + \frac{c_{i,2}}{p_i^2} + \cdots + \frac{c_{i,n_i}}{p_i^{n_i}} \right)$$

geschrieben werden kann, wo $f_0$, $c_{i,k}$, $p_i$ reelle Polynome mit $\text{grad}(c_{i,k}) < \text{grad}(p_i) \leq 2$ bezeichnen. (Hinweis: Man kann die Behauptung etwa durch Induktion über den Grad der Nennerpolynome der rationalen Funktionen beweisen; benutzen Sie die in den vorstehenden Aufgaben audgesprochenen Tatsachen.)

## A.2 Normierte und euklidische Vektorräume, metrische Räume, Konvergenz

**6.** Es bezeichne $(X, |\cdot|)$ einen normierten Vektorraum. Zeigen Sie, daß die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) Es gibt ein positiv definites Skalarprodukt $\langle\, ,\, \rangle$ auf $X$, sodaß $|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ für alle $x \in X$.

(b) Die Norm $|\cdot|$ erfüllt die Parallelogrammregel, d.h. es ist $|x+y|^2 + |x-y|^2 = 2|x|^2 + 2|y|^2$ für alle $x, y \in X$.

**7.** Für eine reelle Zahl $p \geq 1$ und einen Vektor $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ setzen wir

$$|x|_p := \left( \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

(i) Beweisen Sie die *Höldersche Ungleichung* : es gilt

$$x \cdot y \leq |x|_p \cdot |y|_q$$

für alle $x, y \in \mathbf{R}^n$ und alle positiven reellen Zahlen $p, q$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. (Hinweis: beweisen Sie zunächst die für alle $a, b \geq 0$ geltende Ungleichung $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$, und wenden Sie diese auf die einzelnen Summanden der Summe $\sum \frac{|x_i|}{|x|_p} \frac{|y_i|}{|y|_q}$ an.)

(ii) Zeigen Sie, daß $x \mapsto |\cdot|_p$ eine Norm auf dem $\mathbf{R}^n$ definiert. (Hinweis zur Dreiecksungleichung: schreiben Sie $\sum (x_i + y_i)^p = \sum x_i (x_i + y_i)^{p-1} + \sum y_i (x_i + y_i)^{p-1}$ und wenden sie auf die Summmen auf der rechten Seite jeweils die Höldersche Ungleichung an.)

**8.** (i) Zeigen Sie in den Bezeichnungen der vorstehenden Aufgabe, daß durch

$$|x|_\infty := \lim_{p \to \infty} |x|_p$$

eine Norm auf dem $\mathbf{R}^n$ definiert wird. Berechnen Sie den Grenzwert $|\cdot|_\infty$.

(ii) Skizzieren Sie die Einheitskreise $\left\{ x \in \mathbf{R}^2 \mid |x|_p = 1 \right\}$.

## A.3 Stetigkeit

**9.** Sei $A$ Teilmenge eines metrischen Raumes $X$ mit der Eigenschaft, daß jede stetige Funktion $f\colon A \to \mathbf{R}$ beschränkt ist. Zeigen Sie, daß $A$ dann eine abgeschlossene Teilmenge von $X$ ist.

**10.** Sei $n \geq 2$; finden Sie eine Funktion $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, die im Punkt 0 unstetig ist, sodaß aber die Einschränkung $f|\Gamma$ für jede Gerade $\Gamma$ durch 0 im Punkt 0 stetig ist.

**11.** Es bezeichne $\mathcal{W}$ die Menge aller Würfel der Gestalt $[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}] \times [\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}]$ und $\mathcal{I}$ die Menge aller Intervalle der Gestalt $[\frac{k-1}{4^n}, \frac{k}{4^n}]$ ($n \geq 0$, $1 \leq i, j \leq 2^n$, $1 \leq k \leq 4^n$). Sei $\phi\colon \mathcal{I} \to \mathcal{W}$ eine Bijektion mit den Eigenschaften

$$\forall_{I_1, I_2 \in \mathcal{I}} \, (I_1 \subset I_2 \Longrightarrow \phi(I_1) \subset \phi(I_2))\,,$$
$$\forall_{I_1, I_2 \in \mathcal{I}} \, (I_1 \cap I_2 \neq \emptyset \Longrightarrow \phi(I_1) \cap \phi(I_2) \neq \emptyset)\,.$$

(i) Zeigen Sie, daß genau eine Abbildung $f\colon [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$ existiert, sodaß $\phi(I) = f(I)$ für alle $I \in \mathcal{I}$ gilt.

(ii) Zeigen Sie, daß $f$ stetig und surjektiv ist.

(iii) Zeigen Sie die Existenz eines Bijektion $\phi$ mit den beiden angegebenen Eigenschaften.

**12.** Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung zwischen metrischen Räumen. Zeigen Sie, daß $f$ genau dann stetig ist, falls für jede abgeschlossene Teilmenge $A \subset Y$ die Menge $f^{-1}(A)$ wieder abgeschlossen ist.

**13.** Zeigen Sie:

(i) $\big\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n \,|\, x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\big\}$ ist abgeschlossen in $\mathbf{R}^n$;

(ii) $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ ist offene Teilmenge in $\mathrm{End}(\mathbf{R}^n)$;

(iii) sind $f, g\colon X \to Y$ stetige Abbildungen zwischen metrischen Räumen, so ist $\{x \in X \,|\, f(x) = g(x)\}$ abgeschlossen in $X$.

## A.4 Differenzierbarkeit

**14.** Seien $X_i, Y$ endlich dimensionale Vektorräume, und es bezeichne $\phi : X_1 \times \cdots \times X_n \to Y$ eine multilineare Abbildung. Zeigen Sie, daß $\phi$ differenzierbar ist, und berechnen Sie die Ableitung.

**15.** Seien $X, Y$ endlich dimensionale Vektorräume, $U$ eine offene Teilmenge von $X$, und $b_i$ $(1 \leq i \leq n)$ eine Basis von $Y$. Es bezeichne $p_i \colon Y \to \mathbf{R}$ die durch $y_1 b_1 + \cdots + y_n b_n \mapsto y_i$ definierte lineare Abbildung. Zeigen Sie daß eine Abbildung $f \colon U \to Y$ genau dann in einem Punkt $a \in U$ differenzierbar ist, falls für jedes $1 \leq i \leq n$ die Abbildung $p_i \circ f$ in $a$ differenzierbar ist.

**16.** Berechnen Sie die partiellen Ableitungen der Funktionen $f(x, y, z) =$ (i) $x^y$ (ii) $(x^y, z)$ (iii) $\sin(x \sin(y \sin z))$ (iv) $x^{y^z}$.

**17.** (i) Es bezeichne $\mathbf{S}$ den Einheitskreis $\mathbf{S} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 |\, x^2 + y^2 = 1\}$, und $f \colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ eine differenzierbare Funktion. Zeigen Sie: hat die Einschränkung $f|_{\mathbf{S}} \colon \mathbf{S} \to \mathbf{R}$ einen relativen Extremwert bei $(x, y) \in \mathbf{S}$, so gilt $x D_2 f(x, y) = y D_1 f(x, y)$.

(ii) Finden Sie die relativen Extremwerte der Abbildung $\phi \colon \mathbf{S} \to \mathbf{R}$, wo $\phi(x, y) = x^3 + y^4$.

**18.** Sei $U$ eine offene Teilmenge des $\mathbf{R}^n$ und $f \colon U \to \mathbf{R}$ eine im Punkt $a \in U$ differenzierbare Abbildung. Für ein $u \in \mathbf{R}^n$ setzen wir

$$D_u f(a) := \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tu) - f(a)}{t}.$$

(i) Zeigen Sie, daß dieser Grenzwert tatsächlich für jedes $u \in \mathbf{R}^n$ existiert.

(ii) Zeigen Sie, daß die Abbildung $\mathbf{S}^{n-1} \to \mathbf{R}$, $u \mapsto D_u f(a)$ ihr Supremum annimmt, und bestimmen Sie diejenigen $u$ in denen das Supremum angenommen wird. (Hierbei bezeichnet $\mathbf{S}^{n-1}$ die Menge aller Vektoren des $\mathbf{R}^n$ mit euklidischer Länge 1.)

(iii) Geben Sie eine geometrische Interpretation ihrer Lösung von (ii).

**19.** Sei $U$ eine $\epsilon$-Umgebung des Punktes 0 im $\mathbf{R}^m$, und sei $f \colon U \to \mathbf{R}$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Zeigen Sie, daß es stetige Funktionen

$g_i \colon U \to \mathbf{R}$ gibt, sodaß

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^{m} x_i g_i(x)$$

für alle $x = (x_1, \ldots, x_m) \in U$ gilt. (Hinweis: differenzieren Sie die Funktion 'Umgebung der 0 in $\mathbf{R}$' $\ni t \mapsto f(tx)$.)

**20.** Sei $f \colon \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ eine differenzierbare Abbildung und $d$ eine relle Zahl. Zeigen Sie, daß die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) Es gilt $f(tx) = t^d f(x)$ für alle $t \in \mathbf{R}$, $t > 0$, und $x \in \mathbf{R}^m$.

(b) Es gilt $\sum_{i=1}^m x_i D_i f(x) = df(x)$ f. a. $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbf{R}^m$.

**21.** Sei $f \colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ differenzierbar. Zeigen Sie, daß die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) $f(a)$ hängt nur von der euklidischen Norm $|a|$ von $a$ ab (d.h.

$$\forall_{a,b \in \mathbf{R}} \left( |a| = |b| \Longrightarrow f(a) = f(b) \right).$$

(b) Es gilt $yD_1 f(x,y) - xD_2 f(x,y) = 0$ für alle $(x,y) \in \mathbf{R}^2$. (Hinweis: betrachten Sie $\theta \mapsto f\left( \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} a \right)$.)

**22.** Finden Sie eine Abbildung $f \colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, sodaß $D_u f(0)$ für jedes $u \in \mathbf{R}^n$ existiert, die aber in 0 nicht differenzierbar ist. (Hinweis: Suchen Sie Funktionen $f$, sodaß $\mathbf{R} \ni t \mapsto f(tu)$ für jedes $u$ konstant ist, aber $f$ in 0 nicht stetig ist.)

**23.** (i) Sei $f \colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ eine differenzierbare Abbildung, sodaß $D_2 f(a) = 0$ für jedes $a \in \mathbf{R}^2$ verschwindet. Zeigen Sie, daß dann $f$ nicht von der zweiten Variablen abhängt (d.h. es gibt eine Funktion $\phi \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, sodaß $f(x,y) = \phi(x)$ für alle $x, y \in \mathbf{R}$).

(ii) Sei jetzt $U = \mathbf{R}^2 \setminus \{(x,0) | \, x \le 0\}$. Konstruieren Sie eine differenzierbare Abbildung $f \colon U \to \mathbf{R}$, sodaß einerseits $D_2 f(a) = 0$ für alle $a \in U$ ist, andererseits aber $f$ tatsächlich von der zweiten Variablen abhängt.

**24.** Bestimmen Sie alle differenzierbaren Abbildungen $f \colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, sodaß

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{2x + y + x^2 y + y^3 + 2x^3 y^2}{(1 + x^2 + y^2)(1 + x^2 y^2)}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{2y + x + y^2 x + x^3 + 2y^3 x^2}{(1 + x^2 + y^2)(1 + x^2 y^2)}. \end{aligned}$$

(Hinweis: Betrachten Sie $(x, y) \mapsto \int_0^x D_1 f(t, 0)dt + \int_0^y D_2 f(x, t)dt$.)

**25.** Es bezeichne $|\cdot|_p$ die $p$-Norm auf dem $\mathbf{R}^n$ (d.h. $|x|_p = (\sum |x_i|^p)^{1/p}$ ($p \geq 1$) bzw. $|x|_p = \max |x_i|$ ($p = \infty$) für $x = (x_1, \ldots, x_n)$), und es sei $A \in \mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$. Zeigen Sie

$$\sup \left\{ |Ax| \,\middle|\, |x|_p = 1 \right\} = |a|_{\frac{p}{p-1}},$$

wobei $a$ denjenigen Vektor im $\mathbf{R}^n$ mit $Ax = a \cdot x$ ($x \in \mathbf{R}^n$) bezeichnet (Ist $p = \infty$ bzw. $p = 1$, so ist hierbei $\frac{p}{p-1}$ als 1 bzw. als $\infty$ zu interpretieren. Hinweis: Falls Sie es geschickt anstellen, benötigen Sie zur Lösung keine Differentialrechnung.)

**26.** Für $x, y \in \mathbf{R}$ sei

$$f(x, y) := \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & falls (x, y) \neq 0 \\ 0 & falls (x, y) = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß $f$ im Punkt 0 einmal differenzierbar und zweimal partiell differenzierbar ist, daß aber für die zweiten partiellen Ableitungen im Punkt 0 gilt:

$$D_{1,2} f(0) \neq D_{2,1} f(0).$$

Ist $f$ im Punkt 0 zweimal differenzierbar ? Wie oft ist $f$ in von 0 verschiedenen Punkten differenzierbar ?

**27.** Sei $f : U \to \mathbf{R}$ ($U \subset \mathbf{R}^m$ offen) eine differenzierbare Abbildung mit identisch verschwindender Ableitung. Zeigen Sie, daß dann $f$ lokal konstant ist (d.h. zu jedem $a \in U$ gibt es eine in $U$ enthaltene $\epsilon$-Umgebung von $a$, auf der $f$ konstant ist).

**28.** Es seien $f_1, \ldots, f_n : U \to \mathbf{R}$ in einer offenen Teilmenge $U$ des $\mathbf{R}^m$ stetig differenzierbare Abbildungen. Es gebe einen Punkt $a \in U$, sodaß die Vektoren $\mathrm{grad} f_i(a)$ ($1 \leq n$) linear unabhängig sind. Zeigen Sie, daß die Funktionen $f_1, \ldots, f_n$ algebraisch unabhängig sind (d.h. es gibt kein von 0 verschiedenes Polynom $p(x_1, \ldots, x_n)$, sodaß die Abbildung $p(f_1, \ldots, f_n)$ auf $U$ identisch verschwindet). (Hinweis: Berechnen Sie die Jacobimatrix von $p(f_1, \ldots, f_n)$ und benutzen Sie Aufgabe 3.)

**29.** Es bezeichne $|\cdot|$ die euklidische Norm auf dem $\mathbf{R}^2$ und $A$ eine Element von $\mathrm{Hom}(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^2)$. Berechnen Sie

$$\sup \left\{ |Ax| \,\middle|\, |x| = 1 \right\}.$$

**30.** Es sei $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ eine differenzierbare, bijektive Abbildung. Es sei $f^{-1}$ an der Stelle $a$ differenzierbar; berechnen Sie $\left(f^{-1}\right)'(a)$.

**31.** Finden Sie die partiellen Ableitungen der folgenden Funktionen ($g(t)$ bezeichnet dabei eine auf $\mathbf{R}$ definierte stetige Funktion):

(i) $f(x,y) = \int_x^y g(t)\,dt$

(ii) $f(x,y) = \int_x^{xy} g(t)\,dt$

(iii) $f(x,y) = \int_0^{x+y^2} g(t)\,dt$

(iv) $f(x,y) = \int_x^{\int_x^y \cos u\,du} g(t)\,dt$

**32.** Sei $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ differenzierbar, sei $E := \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, ax^2 + by^2 = 1\right\}$ ($a, b$ sind zwei von 0 verschiedene reelle Zahlen). Zeigen Sie: hat die Einschränkung $f|_E$ im Punkt $(x,y) \in E$ ein lokales Extremum, so ist $\mathrm{grad} f(x,y)$ ein Vielfaches des Vektors $(ax, by)$. Geben Sie eine geometrische Interpretation dieses Sachverhalts.

**33.** Konstruieren Sie für jedes $n \geq 2$ eine differenzierbare Abb. $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, die nicht injektiv ist, sodaß aber in jedem Punkt $a$ des $\mathbf{R}^n$ ihre Ableitung $f'(a)$ injektiv ist. (Hinweis: betrachten Sie $\mathbf{C} \ni z \to \mathrm{e}^z$.) Zeigen Sie, daß im Fall $n = 1$ solch ein $f$ nicht existiert.

**34.** Sei $U$ eine offene Teilmenge des $\mathbf{R}^n$ und $f \in \mathcal{C}^k(U)$. Zeigen Sie: für jedes $x \in U$ und jedes $n$-Tupel von nichtnegativen ganzen Zahlen $i_1, \ldots, i_n$ mit $i_1 + \cdots + i_n = k$ gilt

$$\frac{\partial^k}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_n^{i_n}} f(x) = \lim_{(h_1,\ldots,h_n)\to 0} \frac{\Delta_{1,h_1}^{i_1} \cdots \Delta_{n,h_n}^{i_n} f(x)}{h_1^{i_1} \cdots h_n^{i_n}}.$$

Hierbei benutzen wir die Notation $\Delta_{i,h} g(x) = g(x + he_i) - g(x)$, wo $g$ irgendeine Funktion von $n$ rellen Variablen bedeutet, und $e_i$ denjenigen Vektor im $\mathbf{R}^n$ mit einer 1 an der $i$-ten Stelle und einer 0 an jeder anderen Stelle bezeichnet.

**35.** Berechnen Sie die Taylorreihe der Abbildung

$$\mathrm{inv}\colon \mathrm{GL}_2(\mathbf{R}) \to \mathrm{GL}_2(\mathbf{R}),\ A \mapsto A^{-1}$$

um den Punkt $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, und zeigen Sie, daß diese in einer offenen Umgebung von $e$ gegen $\mathrm{inv}$ konvergiert.

**36.** Sei $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ ($U$ eine offene Teilmenge des $\mathbf{R}^n$). Sei $a \in U$ mit $f(a) = 0$, und sei $k$ die kleinste nichtnegative ganze Zahl mit $f^{(k)}(a) \neq 0$. Jeder Vektor $x \in \mathbf{R}^n$ mit $f^{(k)}(a)(x, \ldots, x) = 0$ wird als *Tangente an die Hyperfläche* $V(f) = \{x \in U \mid f(x) = 0\}$ *im Punkt* $a$ bezeichnet.

(i) Sei $\gamma : I \to U$ ein differenzierbarer Weg ($I$ ein offenes Intervall in $\mathbf{R}$), sodaß $f \circ \gamma = 0$ gilt. Zeigen Sie: für jedes $t \in \mathbf{R}$ ist $\gamma'(t)(1)$ eine Tangente an die Hyperfläche $V(f)$ im Punkt $\gamma(t)$.

(ii) Berechnen Sie die Tangenten der Kurve $V(p)$, wo

$$p = (3x^2 - y^2)y - (x^2 + y^2)^2.$$

(iii) Skizzieren Sie $V(p)$ und konstruieren Sie eine differenzierbare und surjektive Abbildung $\mathbf{R} \to V(p)$. (Hinweis: studieren Sie das folgende Bild !)

**37.** Berechnen Sie die Taylorentwicklung von $f(x_1, \ldots, x_n) = (1 + x_1 + \cdots + x_n)^r$ um den Nullpunkt und zeigen Sie, daß diese in einer Umgebung des Nullpunktes gegen $f$ konvergiert.

**38.** Zeigen Sie die Identität

$$f^{(k)}(a)(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} D_{i_1} \cdots D_{i_k} f(a)\, x_{1,i_1} \cdots x_{k,i_k}$$

( $x_i = (x_{i,1}, \ldots, x_{i,n})$ ). Hierbei ist $f$ eine $k$-mal differenzierbare Funktion in $n$ Variablen.

**39.** Sei $\phi$: $X^k \to \mathbf{R}$ eine antisymetrische $k$-lineare Abbildung des endlich dimensionalen Vektorraums $X$ nach $\mathbf{R}$. Berechnen Sie $\phi^{(k)}(a)$.

**40.** Seien $(X, |\cdot|_X)$, $(Y, |\cdot|_Y)$ endlich dimensionale normierte Vektorräume, und es bezeichne $L^k(X, Y)$ den Vektorraum der $k$-linearen Abbildungen von $X$ nach $Y$. Zeigen Sie, daß durch

$$|\phi| := \sup\left\{|\phi(x_1, \ldots, x_k)|_Y \ : \ \forall_{1 \leq i \leq n}\ x_i \in X,\ |x_i|_X = 1\right\}$$

eine Norm auf $L^k(X, Y)$ erklärt wird. (Es ist insbesondere zu zeigen, daß das angeführte Supremum tatsächlich existiert !)

**41.** Sei $f \in \mathcal{C}^2(U)$, $U$ eine offene Teilmenge im $\mathbf{R}^2$, $a \in U$ mit $\operatorname{grad} f(a) = 0$. Es sei $\Delta = f_{x,x}(a) f_{y,y}(a) - f_{x,y}(a)^2 \neq 0$. Zeigen Sie:

(i) Der Punkt $a$ ist ein lokales Maximum (Minimum) von $f$ genau dann, wenn $\Delta > 0$ und $f_{x,x}(a) < 0$ $(> 0)$ gilt.

(ii) Der Punkt $a$ ist ein (nicht-entarteter) Sattelpunkt von $f$ genau dann, wenn $\Delta < 0$ ist.

**42.** Bestimmen Sie die kritischen Punkte der Funktion $f(x, y) = \cos x + \sin y$ und das Verhalten von $f$ in den kritischen Punkten. Skizzieren Sie den Verlauf der Niveaukurven der Funktion auf dem $\mathbf{R}^2$.

**43.** Finden Sie die kritischen Punkte der Funktion $f(x, y) = y(3x^2 - y^2) - (x^2 + y^2)^2$, entscheiden Sie, welche davon Maxima oder Minima sind, und skizzieren Sie den Verlauf der Niveaukurven der Funktion auf dem ganzen $\mathbf{R}^2$.

**44.** Sei $U$ eine offene, den Nullpunkt enthaltene Teilmenge des $\mathbf{R}^n$, und sei $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$. Es gebe homogene Polynome $p_\nu(x_1, \dots, x_n)$ vom Grad $\nu$ und ein $k$, sodaß

$$\lim_{x \to 0} \frac{[f(x_1, \dots, x_n) - (p_0 + p_1(x_1, \dots, x_n) + \dots + p_k(x_1, \dots, x_n))]}{|x|^k} = 0$$

ist, wobei $|x|$ die euklidische Norm von $x = (x_1, \dots, x_n)$ bezeichnet. Zeigen Sie:

$$p_\nu(x_1, \dots, x_n) = \frac{f^{(\nu)}(0)(x)^\nu}{\nu!}$$

für $0 \le \nu \le k$.

**45.** Sei $f(x, y)$ eine in einer offenen Teilmenge des $\mathbf{R}^2$ hinreichend oft differenzierbare Funktion. Schreiben Sie die Taylorentwicklung von $f(x, y)$ um einen Punkt $a \in U$ bis zum dritten Glied explizit aus.

**46.** Konstruieren Sie eine glatte Funktion $f(x, y)$ mit $f(0, 0) = 0$, sodaß die Niveaukurve $f(x, y) = 0$ im Nullpunkt (bis auf skalare Vielfache) genau 17 verschiedene Tangenten hat. Wie sieht der Graph Ihrer Funktion in der Nähe des Nullpunktes aus ?

**47.** Welche der folgenden quadratischen Formen sind positiv, negativ bzw. indefinit :

(i) $3x^2 - 2xy - 2xz + 3y^2 - 2zy + 3z^2$

(ii) $5x^2 + 9xy - 4xz + 2y^2 - 9zy + 7z^2$

(iii) $-3x^2 - 4xy - 6xz - 6y^2 - 8zy - 11z^2$

**48.** Seien $\phi, \psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$, und sei $f(x,y) := \phi(x)\psi(y)$. Bestimmen Sie die kritischen Punkte von $f$, und diskutieren Sie das Verhalten von $f$ in den kritischen Punkten in Abhängigkeit vom Verhalten von $\phi$ und $\psi$.

**49.** Finden Sie eine glatte Funktion $f(x,y)$, deren Graph etwa so aussieht:

## A.5 Umkehrsatz, Implizite Funktionen

**50.** Es bezeichne $P$ die Abb. $P\colon \mathbf{R}_{\geq 0} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$, $\quad P(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.

(i) Zeigen Sie, daß $P$ surjektiv ist; berechnen Sie die Urbilder unter $P$ zu gegebenem Punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

(ii) Zeigen Sie, daß $P$ bei Einschränkung eine bijektive, glatte Abbildung

$$\underline{P}\colon \mathbf{R}_{>0} \times (-\pi, +\pi) \to \mathbf{R}^2 \setminus \left\{(x,0) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x \leq 0\right\}$$

mit glatter Umkehrabbildung definiert. Berechnen Sie $D\underline{P}$ und $D(\underline{P}^{-1})$.

**51.** Wo ist die Abb. $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $f(x,y) = (\cos x \cosh y, -\sin x \sinh y)$, lokal invertierbar?

**52.** Zeigen Sie, daß die Abbildung $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $f(x,y,z) = (x + \mathrm{e}^y, y + \mathrm{e}^z, z + \mathrm{e}^x)$, bijektiv ist und eine glatte Umkehrfunktion besitzt.

**53.** Sei $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie, daß $f$ dann *nicht* injektiv ist. (Hinweis: Ist etwa $D_1 f(a) \neq 0$, so betrachten Sie die Abbildung $(x,y) \mapsto (f(x,y), y)$.)

**54.** Zeigen Sie: die Funktion $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{falls} x \neq 0 \\ 0 & \text{falls} x = 0 \end{cases}$ ist differenzierbar, $Df(0)$ ist invertierbar, aber $f$ ist bei 0 *nicht* lokal invertierbar. ($Df$ ist bei 0 unstetig!)

## A.6 Iteration von Abbildungen

**55.** Studieren Sie das Konvergenz- oder Divergenzverhalten der Folge $(A^n x)$ in Abhängigkeit vom Startwert $x \in \mathbf{R}^2$, wobei

$$\text{(i)}\quad A = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{(ii)}\quad A = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ -6 & -7 \end{pmatrix} \qquad \text{(iii)}\quad A = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 2 \\ -\frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

**56.** Zeigen Sie, daß die Abbildung $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$, $(x, y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy)$ in jedem Punkt lokal invertierbar ist, ferner surjektiv, aber *nicht* injektiv ist.

**57.** Es sei $f(x) = x^2 + 1/4$. Bestimmen Sie die Menge der reellen Zahlen $x$, für die die Folge $(f^n x)$ beschränkt bleibt.

**58.** Es seien $a_\ell$ $(0 \leq \ell \leq n)$ komplexe Zahlen, und es bezeichne $f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ die Abbildung mit $f(z) = |p(z)|^2 = p(z)\overline{p(z)}$, wobei

$$p(z) = a_n z^n + \cdots + a_0 = \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell z^\ell.$$

Berechnen Sie $Df$ und $D^2 f$. Wieviele kritische Punkte hat $f$ höchstens? Gesetzt der Fall, es ist $D^2 f(a) \neq 0$ für jeden kritischen Punkt $a$, wieviele lokale Minima, wieviele Sattelpunkte gibt es dann?

**59.** Für vorgegebenes $y \in \mathbf{R}$ bezeichne $g_y\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ die Abbildung mit $g_y(x) = y + x - \mathrm{e}^x$. Zeigen Sie, daß

$$\lim_{n\to\infty} g_y^n(x_0) = -\infty$$

für jedes $x_0$ und jedes $y \leq 0$.

**60.** Es bezeichne $\mathrm{inv}\colon \mathrm{GL}(X) \to \mathrm{GL}(X)$ die Abbildung mit $\mathrm{inv}(A) = A^{-1}$. Berechnen Sie $D^k(\mathrm{inv})$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

**61.** Zu vorgegeben komplexen Zahlen $a_\ell$ bezeichne $p\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ die Abbildung $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0$. Es sei $a$ ein Fixpunkt von $p$ (d.h. $p(a) = a$); der Fixpunkt $a$ heißt attraktiv (abstoßend), falls $|Dp(a)(1)| < 1$ (bzw. $> 1$) ist ($|\cdot|$ = komplexer Absolutbetrag). Zeigen Sie:

(i) Ist $a$ attraktiv, so gibt es ein $r > 0$, sodaß für jede kompexe Zahl $z_0$ mit $|z_0 - a| < r$ die Folge der Iterierten $p^n(z_0)$ gegen $a$ konvergiert.

(ii) Ist $a$ abstoßend, und konvergiert für irgendeine komplexe Zahl $z_0$ die Folge der $p^n(z_0)$ gegen $a$, so existiert ein $n_0$, sodaß $p^n(z_0) = a$ für alle p$n \geq n_0$ gilt.

**62.** Es sei $f \in \mathcal{C}^2(X, X)$, es sei $a \in X$ eine Lösung der Gleichung $f(x) = 0$, und $Df(a)$ sei bijektiv. Zeigen Sie: für jeden hinreichend nahe bei $a$ gewählten Anfangswert $x_0$ ist die Folge der Iterierten $N^n(x_0)$ der Abbildung $N(x) = x - [Df(x)]^{-1}(f(x))$ wohldefiniert und konvergiert gegen $a$. (Hinweis: $a$ ist *superattraktiver* Fixpunkt von $N$, d.h. $N(a) = a$ und $DN(a) = 0$ !)

**63.** Es sei $f(x) = x^2 - 2$, $N(x) = x - \frac{x^2-2}{2x}$. Berechnen Sie die ersten Iterierten $N^n(1)$.

**64.** Finden Sie mittels des *Newton-Verfahrens* (d.h. mittels des in Aufgabe 1 beschriebenen Verfahrens) rationale Approximationen für den goldenen Schnitt.

**65.** Es sei $f\colon \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \to \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, $f(x) = \frac{1}{x-[x]}$ ($[x]$ = größte ganze Zahl $\leq x$). Welche Informationen geben Ihnen die Iterierten $f^n(x_0)$ zu vorgegebenem Startwert $x_0$?

**66.** Zeigen Sie: Zu jedem $A \in \mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ existiert eine offene Teilmenge $V \in \mathbf{R}^{n\times n}$ mit $A \in V$ und eine glatte und bijektive Abbildung $f\colon U \to V \cap \mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$, wo $U$ eine offene Teilmenge des $\mathbf{R}^{n^2-1}$ ist. Hierbei bezeichnet $\mathbf{R}^{n\times n}$ den Vektorraum der $n \times n$-Matrizen mit Koeffizienten in $\mathbf{R}$ und $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ die Teilmenge aller Matrizen mit Determinante 1.

**67.** Sei $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^n)$ und $A = \{x \in \mathbf{R}^n \mid f(x) = 0\}$. Gegeben seien pein $a \in A$ und ein Vektor $x_0 \in \mathbf{R}^n$, sodaß $\mathrm{grad} f(a) \neq 0$ und $\mathrm{grad} f(a) \cdot x_0 = 0$. Zeigen Sie: Es existiert eine stetig differenzierbare Abbildung $w\colon I \to A$, wo $I$ ein offenes, den Nullpunkt enthaltenes Intervall bezeichnet, sodaß $w(0) = a$ und $w'(0)(1) = x_0$ gilt.

**68.** Finden Sie alle Abbildungen $w\colon I \to \mathbf{R}^2$ ($I$ eine offenes, die 0 enthaltenes Intervall in $\mathbf{R}$), sodaß $w(0) = 0$ und $p(w(t), t) = 0$ für alle $t \in I$ gilt. Hierbei bezeichnet $p$ das Polynom $p = (3x^2 - y^2)y - (x^2 + y^2)^2$.

## A.7 Maxima und Minima mit Nebenbedingungen

**69.** Seien $b_1, b_2$ linear unabhängige Vektoren im $\mathbf{R}^3$. Es bezeichne $\delta(a)$ den Abstand des Punktes $a \in \mathbf{R}^3$ zur *Geraden*

$$g = \left\{x \in \mathbf{R}^3 \mid b_1 \cdot x = b_2 \cdot x = 0\right\},$$

d.h. es sei

$$\delta(a) = \inf\left\{\sqrt{(x-a)^2} \mid x \in g\right\}.$$

Berechnen Sie $\delta(a)$.

**70.** Verallgemeinern Sie die vorstehende Aufgabe von 3 auf den Fall von $n$ Dimensionen.

**71.** Es seien $a, b, c$ reelle Zahlen mit $abc \neq 0$, und es sei $E$ die Menge der reellen Tripel $(x, y, z)$ mit $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$. Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Abbildung $f\colon E \to \mathbf{R}, \quad (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$.

**72.** Sei $L$ die Menge aller Punkte $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, für die das Produkt der Entfernungen von den Punkten $(1, 0)$ und $(-1, 0)$ gleich 1 ist. Finden Sie die Punkte $(x, y) \in L$, für die $|x|$ oder $|y|$ maximal ist.

**73.** Für $a, b \in \mathbf{R}$ sei $\delta(a, b) = \inf\left\{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \mid x, y \in \mathbf{R},\ xy = 1\right\}$. Bestimmen Sie die maximale offene Teilmenge $U \subset \mathbf{R}^2$, für die $\delta|_U$ glatt ist.

# Anhang B

# Übungsaufgaben aus dem Sommersemester 2001

Dir folgenden, auf 10 Blätter verteilten Aufgaben wurden den Studierenden wöchentlich zur Einübung der in der Vorlesung vorgestellten Techniken zur Verfügung gestellt. Da sie chronologisch der Vorlesung folgen, wird die Zuordnung zum Stoff kein Problem darstellen.

## Blatt 1

**Aufgabe 1** (4 P)
Zeigen Sie, daß durch

$$\tilde{d}(x,y) := \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}, \quad x,y \in \mathbf{R}^n,$$

wobei $d$ die übliche euklidische Metrik auf $\mathbf{R}^n$ bezeichne, eine weitere Metrik auf $\mathbf{R}^n$ definiert wird. Beweisen Sie, daß diese Metrik von keiner Norm erzeugt wird. Zeigen Sie weiter, daß $\tilde{d}$ und $d$ die gleiche Topologie liefern, d.h., daß eine Teilmenge von $\mathbf{R}^n$ genau dann bezüglich $\tilde{d}$ offen ist, wenn sie es bezüglich $d$ ist.

**Aufgabe 2** (4 P)
Sei $X$ ein metrischer Raum; für $A \subset X$ bezeiche $\bar{A}$ den Abschluß, $A^\circ$ das Innere und $\partial A := \bar{A} \backslash A^\circ$ den *Rand* von $A$. Zeigen Sie:

**a)** $A^\circ$ ist offen, $\bar{A}$ und $\partial A$ sind abgeschlossen. $\partial A$ ist die Menge aller $x \in X$, für die $U_\varepsilon(x)$ für alle $\varepsilon > 0$ sowohl Punkte aus $A$ als auch Punkte aus $X \backslash A$ enthält. Es gilt $\partial A = \partial(X \backslash A)$.

**b)** $A$ ist offen genau dann, wenn $A \cap \partial A = \emptyset$. $A$ ist abgeschlossen genau dann, wenn $\partial A \subset A$

**Aufgabe 3** (2+2 P)
Sei $X = \mathbf{R}^2$ mit der euklidischen Metrik; bestimmen Sie $\bar{A}$, $A^\circ$ und $\partial A$ für

**a)** $A := \mathbf{Q}^2$
**b)** $A := \{(x, x^{-1}) \mid x > 0\}$

**Aufgabe 4** (4 P)
Sei $X = C^1[0,1]$ der Vektorraum der stetig differenzierbaren Funktionen auf $[0,1]$ und sei für $f \in X$

$$||f|| := ||f||_\infty + ||f'||_\infty,$$

wobei $||f||_\infty := \max_{t\in[0,1]} |f(t)|$. Zeigen Sie:

**a)** $||\cdot||$ ist eine Norm auf $C^1[0,1]$.

**b)** Die Folge $(f_n)_{n\geq 1}$, definiert durch $f_n(x) := n^{-1}x^n$, konvergiert in $(X, ||\cdot||_\infty)$ jedoch nicht in $(X, ||\cdot||)$.[1]

**Nur so: Ein topologischer Beweis für $|\mathbf{P}| = \infty$**
Für $a, b \in \mathbf{Z}$, $b \neq 0$ verwenden wir die Notation

$$(*) \quad M_{a,b} := \{a + mb \mid m \in \mathbf{Z}\} \subset \mathbf{Z}$$

und definieren die Menge $\mathcal{T}_0 \subset \{M \mid M \subset \mathbf{Z}\}$ als die Menge aller Teilmengen von $\mathbf{Z}$, die als Vereinigung von Mengen der Gestalt $(*)$ darstellbar sind (wobei natürlich auch unendliche Vereinigungen zugelassen sind) und $\mathcal{T} := \mathcal{T}_0 \cup \{\emptyset\}$.
**Beobachtung:** $\mathcal{T}$ ist eine Topologie auf $\mathbf{Z}$, d.h.
(i) $\emptyset, \mathbf{Z} \in \mathcal{T}$
(ii) $U_1, U_2 \in \mathcal{T} \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$
(iii) $U_i$ $(i \in I) \Rightarrow \bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$
(Begründung?)
Betrachten Sie nun die Mengen $M_{0,p}$ für $p \in \mathbf{P}$ und folgern Sie aus obiger Beobachtung, daß es unendlich viele Primzahlen gibt.
(Hinweis: Man überlege sich, daß $\{-1, 1\} \notin \mathcal{T}$, daß aber $(\mathbf{Z} \backslash M_{0,p}) \in \mathcal{T}$.)

# Blatt 2

**Aufgabe 1** (4 P)
Zeigen sie, daß der normierte Vektorraum $(X, ||\cdot||)$ aus Aufgabe 4 von Blatt 1 ein Banachraum ist.
(Hinweis: Um die Vollständigkeit von $X$ zu beweisen, folgere man zunächst aus der Vollständigkeit von $(C^0[0,1], ||\cdot||_\infty)$, daß für eine Cauchyfolge $f_n \in$

[1] Die beiden Metriken liefern also verschiedene Topologien.

$(X, ||\cdot||)$ gilt: $f_n \to f$ und $f'_n \to f^*$ bzgl. $||\cdot||_\infty$ für geignete $f, f^* \in C^0[0,1]$.
Man definiere dann

$$\tilde{f}(x) := f(0) + \int_0^x f^*(t)dt$$

und beweise $f = \tilde{f}$.)

**Aufgabe 2** (4 P)
**a)** Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum und $K_i$, $i \in I$, eine Familie kompakter Teilmengen von X. Beweisen Sie für endliches $I$, daß $K := \bigcup_{i \in I} K_i$ ebenfalls kompakt ist. Geben Sie ein Beispiel dafür, daß dies für unendliches $I$ nicht mehr unbedingt zutrifft.
**b)** Zeigen Sie, daß es abgeschlossene, beschränkte Teilmengen von $(\mathbf{R}^n, \tilde{d})$ (vgl. Aufgabe 1 von Blattf 1) gibt, die nicht kompakt sind.

**Aufgabe 3** (4 P)
**a)** Untersuchen Sie die folgenden Teilmengen von $X = \mathbf{R}^2$ auf Kompaktheit:

**(i)** $A := \mathbf{Q}^2 \cap U_{\frac{1}{2}}(0)$
**(ii)** $A := \{(x, x^{-1}) \mid x > 0\}$

**b)** Seien $K_1 \subset \mathbf{R}^n$, $K_2 \subset \mathbf{R}^m$ kompakte Teilmengen. Beweisen Sie, daß auch $K_1 \times K_2 \subset \mathbf{R}^{n+m}$ kompakt ist.
(In **a)** und **b)** ist die euklidische Metrik auf den $\mathbf{R}^k$, $k \in \mathbf{N}^*$, gemeint.)

**Aufgabe 4** (4 P)
Seien $(X_1, d_1)$ und $(X_2, d_2)$ metrische Räume.
**a)** Beweisen Sie, daß auf $X := X_1 \times X_2$ durch

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) := \max(d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)),$$

$(x_1, y_1 \in X_1,\ x_2, y_2 \in X_2)$ eine Metrik definiert wird.
**b)** Zeigen Sie: Sind $(X_1, d_1)$ und $(X_2, d_2)$ kompakt, so ist auch $(X, d)$ kompakt.
(Hinweis: Sei $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung. Man zeige zunächst, daß für jedes $x_1 \in X_1$ ein $\varepsilon_1 > 0$ existiert, so daß $U_{d_1, \varepsilon_1}(x_1) \times X_2$ schon von endlich vielen der $U_1$ überdeckt wird.)

# Blatt 3

**Aufgabe 1** (4 P)
Eine Teilmenge $A$ eines metrischen Raums $(X, d)$ heißt *diskret*, falls für alle $x \in X$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, für das $U_\varepsilon(x) \cap A$ endlich ist. Zeigen Sie, daß jede diskrete Teilmenge $A$ eines Kompaktums $K \subset X$ endlich ist.

**Aufgabe 2** (4 P)
Untersuchen Sie folgende Funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ auf Stetigkeit:

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{|x|+y^2}} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

**Aufgabe 3** (4 P)
**a)** Sei $(X,d)$ ein metrischer Raum $A \subset X$. Beweisen Sie, daß die Funktion

$$\begin{aligned} f : X &\to \mathbf{R} \\ x &\mapsto \inf_{a \in A} d(x,a) \end{aligned}$$

stetig ist.
**b)** Zeigen Sie, daß die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} D : (C^1[0,1], ||\cdot||) &\to (C^0[0,1], ||\cdot||_\infty) \\ f &\mapsto f' \end{aligned}$$

(mit der Norm $||\cdot||$ aus A4 von Blatt 1) eine stetige Funktion ist.

**Aufgabe 4** (4 P)
Ein metrischer Raum $(X,d)$ heißt *zusammenhängend*, wenn $\emptyset$ und $X$ die einzigen zugleich offenen und abgeschlossenen Teilmengen von $X$ sind. Beweisen Sie, daß $\mathbf{R}^n$ mit der euklidischen Metrik ein zusammenhängender Raum ist.
(Hinweis: A2b) von Blatt 1 beachtend zeige man, daß $\partial A \neq \emptyset$ für jedes $A \subset X$ mit $A \neq \emptyset, X$. Dabei kann man $f$ aus obiger A3a) verwenden.)

**Nur so:** Man zeige, daß für $r \in \mathbf{R} \backslash \mathbf{Q}$ die Menge

$$M := \{x \in \mathbf{R} \mid x = a + br,\ a, b \in \mathbf{Z}\}$$

dicht in $\mathbf{R}$ liegt.
(Hinweis: $M$ ist mit der Verknüpfung $+$ eine Gruppe. Man zeige zunächst, daß $M$ nicht diskret in $\mathbf{R}$ liegt (vgl. A1), indem man sich überlege, daß jede in $\mathbf{R}$ diskrete Untergruppe $H$ von $M$ folgende Gestalt hat:

$$H = \mathbf{Z}x_0, \quad \text{mit } x_0 := \inf\{x \in H \mid x > 0\}.)$$

# Blatt 4

**Aufgabe 1** (4 P)
**a)** Sei $U \subset \mathbf{R}^n$ offen, $a \in U$, und $f :\ U \to \mathbf{R}^m$ erfülle für ein fest vorgegebenes $r > 1$ die Abschätzung

$$||f(x) - f(a)|| \leq (||x-a||)^r, \quad \text{für } x \in U,$$

wobei $||\cdot||$ die euklidische Norm auf $\mathbf{R}^n$ bzw. $\mathbf{R}^m$ bezeichnet. Zeigen Sie, daß $f$ bei $a$ differenzierbar ist und berechnen Sie $Df(a)$.
**b)** Beweisen Sie, daß die Funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{|x|+y^2}} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

differenzierbar ist bei $(x,y) = (0,0)$ mit verschwindender Ableitung.

**Aufgabe 2** (4 P)
Sei $U \subset \mathbf{R}^n$ offen, $a \in U$, und seien $f, g : U \to \mathbf{R}$ differenzierbar bei $a$.
**a)** Zeigen Sie, daß auch $fg$ differenzierbar ist bei $a$ und daß gilt (Hinweis: Man vergleiche Aufgabe 2 von Blatt 11, Analysis I):

$$D(fg)(a) = g(a) \cdot Df(a) + f(a) \cdot Dg(a)$$

**b)** Formulieren und beweisen Sie eine entprechende Quotientenregel.

**Aufgabe 3** (4 P)
Zeigen Sie mit obiger Produkt- und der Kettenregel (und ohne den Formalismus der partiellen Ableitungen, den Sie „noch nicht kennen"), daß die folgende Funktion $f$ in ganz $\mathbf{R}^2$ differenzierbar ist und bestimmen Sie $Df$:

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x^2+y^2 \\ \exp(xy) \end{pmatrix} \end{array}$$

**Aufgabe 4** (4 P)
Sei $r > 0$, $a \in \mathbf{R}^n$ und $U := U_r(a) \subset \mathbf{R}^n$; sei $f : U \to \mathbf{R}^m$ differenzierbar in $U$ mit verschwindender Ableitung. Beweisen Sie, daß $f(x) = f(a)$ für alle $x \in U$ gilt.

## Blatt 5

**Aufgabe 1** (4 P)
**a)** Zeigen Sie, daß die Funktion $f$ aus A3 von Blatt 4 sogar stetig partiell differenzierbar ist und berechnen Sie partielle Ableitungen und Jacobi-Determinante.
**b)** Beweisen Sie, daß die Funktion

$$\begin{array}{cccc} g: & \mathbf{R}^3\backslash\{(0,0,0)\} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & (x_1,x_2,x_3)) & \longmapsto & \sqrt{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{-1}} \end{array}$$

stetig partiell differenzierbar ist und bestimmen Sie grad$g$.

**Aufgabe 2** (4 P)
Zeigen Sie, daß die Funktion $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} ||x||^2 \cdot \sin(||x||^{-1}) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

differenzierbar ist, aber alle partiellen Ableitungen bei $x = 0$ unstetig sind.

**Aufgabe 3** (4 P)
Beweisen Sie, daß sämtliche Richtungsableitungen von $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$,

$$f(x,y) := \begin{cases} \left(\frac{2xy^2}{x^2+y^4}\right)^2 & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

an der Stelle $(0,0)$ existieren und 0 sind, daß aber $f$ unstetig ist bei $(0,0)$.

**Aufgabe 4** (4 P)
Sei $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ stetig, $U \subset \mathbf{R}^n$ offen und nicht leer, und sei $g : U \to \mathbf{R}$ partiell differenzierbar. Zeigen Sie, daß dann auch $h : U \to \mathbf{R}$,

$$h(x) := \int_0^{g(x)} f(t)dt,$$

partiell differenzierbar ist mit $\frac{\partial h}{\partial x_i}(x) = f(g(x))\frac{\partial g}{\partial x_i}(x)$ für $i = 1, \dots, n$.

**Nur so:** *Die elektrische Feldstärke in einer Metallkiste ist überall* 0 *(Faradayscher Käfig)*. Mathematisch: Man zeige, daß jede auf dem Rand verschwindende zweimal stetig differenzierbare Funktion (entspricht „Potential“)

$$f: \ [0,a] \times [0,b] \times [0,c] \to \mathbf{R},$$

die überall die Gleichung $\operatorname{div} \circ \operatorname{grad} f = 0$ erfüllt, überall verschwindet.
(Hinweis: Man wende partielle Integration an auf das Integral

$$\int_0^a \int_0^b \int_0^c \left( \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)^2 \right) dx_3 dx_2 dx_1 \text{ .)}$$

## Blatt 6

**Aufgabe 1** (4 P)
Sei $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zeigen sie, daß $f$ überall zweimal partiell differenzierbar ist, daß aber

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \neq \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0).$$

**Aufgabe 2** (4 P)
Für eine partiell differenzierbare Funktion $v : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ ist die Funktion $\operatorname{rot} v : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ wie folgt definiert:

$$\operatorname{rot} v = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{x_2} - \frac{\partial v_2}{x_3} \\ \frac{\partial v_1}{x_3} - \frac{\partial v_3}{x_1} \\ \frac{\partial v_2}{x_1} - \frac{\partial v_1}{x_2} \end{pmatrix}$$

**a)** Sei $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar, beweisen Sie:

$$\operatorname{rot} \circ \operatorname{grad} f = 0.$$

**b)** Sei $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ zweimal stetig partiell differenzierbar, beweisen Sie:

$$\operatorname{div} \circ \operatorname{rot} g = 0.$$

**Aufgabe 3** (4 P)
Berechnen Sie die Taylorentwicklung der Funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$

$$f(x,y) = \exp(x + y^2)$$

an der Stelle $(x,y) = (0,0)$ bis zur Ordnung 2 auf zwei verschiedene Arten: Zunächst wie in der Vorlesung mit Hilfe der partiellen Ableitungen und danach unter Verwendung der Taylorentwicklung der Funktion $\exp(t)$ bei $t = 0$.

**Aufgabe 4** (4 P)
Sei $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \frac{1}{3}(x^3 + y^3) - 2xy.$$

Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von $f$.

## Blatt 7

**Aufgabe 1** (4 P)
Untersuchen Sie folgende Funktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ auf Extrema:

**(i)** $f(x,y) = \cos x + \sin y$

**(ii)** $f(x, y) = \exp(x) - 2x^2 + y^2 - y$

**Aufgabe 2** (4 P)
Sei $U \subset \mathbf{R}^2$ offen und $f : U \to \mathbf{R}$ hinreichend oft differenzierbar. Schreiben Sie die Taylorentwicklung von $f$ um $a \in U$ bis zur dritten Ordnung explizit aus. Wie sieht diese Entwicklung für das konkrete Beispiel $f(x, y) = \exp(x+y) + \sin(xy)$ an der Stelle $(0, 0)$ aus?

**Aufgabe 3** (8 P)
Für $A = (\alpha_{i,j})_{i,j} \in V := \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbf{R})$ sei $\nu(A) := n \cdot \max_{i,j} |\alpha_{i,j}|$. Beweisen Sie:
**a)** Ist $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ eine (reelle) Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$, so konvergiert die folgende Reihe für $X \in V$ mit $\nu(X) < r$ komponentenweise absolut:

$$f(X) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$$

**b)** Die Funktion $f : V \to V$ aus a) ist differenzierbar bei 0, und es gilt für $H \in V$

$$Df(0)(H) = a_1 H.$$

**c)** Die Funktion $f : V \to V$, $f(X) := X^2$ ist überall differenzierbar mit

$$Df(X_0)(H) = X_0 \cdot H + H \cdot X_0.$$

(Hinweis: $X^2 = (X_0 + (X - X_0))^2 = X_0^2 + \ldots$.)
**d)** Die Funktion $f : \mathrm{Gl}(n, \mathbf{R}) \to \mathrm{Gl}(n, \mathbf{R})$, $f(X) := X^{-1}$ ist überall differenzierbar mit

$$Df(X_0)(H) = -X_0^{-1} \cdot H \cdot X_0^{-1}.$$

(Hinweis: Für $\nu(X_0^{-1}(X - X_0)) < 1$ verwende man die Darstellung
$X^{-1} = g(X_0^{-1}(X - X_0))X_0^{-1}$ mit

$$g(t) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^k = \frac{1}{1+t}, \quad |t| < 1.)$$

**Nur so:** Zeigen sie, daß $\int_{\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ gilt, indem Sie das Doppelintegral $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$ auf zwei Arten berechnen (Rotationssymmetrie!).

# Blatt 8

**Aufgabe 1** (4 P)
Im $\mathbf{R}^n$ seien $k$ Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_k$ gegeben. Beweisen Sie, daß es genau einen Punkt $x \in \mathbf{R}^n$ gibt, für den

$$f(x) = ||x - a_1||^2 + ||x - a_2||^2 + \ldots + ||x - a_k||^2$$

minimal wird und bestimmen Sie ihn.

**Aufgabe 2** (4 P)
**a)** Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum, $0 \leq q < 1$ und $f : X \to X$ eine Abbildung mit $d(f(x), f(y)) \leq q \cdot d(x, y)$ für alle $x, y \in X$. Sei $x_0 \in X$, $x_{n+1} = f(x_n)$ $(n \in \mathbf{N})$ und $\xi \in X$ die nach dem Banachschen Fixpunktsatz eindeutige Lösung der Gleichung $\xi = f(\xi)$. Zeigen Sie:

$$d(x_n, \xi) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x_0, x_1)$$

**b)** Zeigen Sie, daß die Gleichung $x = \cos x$ genau eine Lösung $\xi$ im Intervall $[0, 1]$ hat und daß $\xi = \lim_{n\to\infty} x_n$, wobei $x_0 = 0$, $x_{n+1} = \cos x_n$ $(n \in \mathbf{N})$. Schätzen Sie den Fehler $|x_{10} - \xi|$ ab.

**Aufgabe 3** (4 P)
Sei $(X, ||\cdot||)$ ein vollständiger normierter Vektorraum (Banachraum), $A \subset X$ abgeschlossen und $q > 1$. Sei $f : A \to A$ eine Abbildung mit

$$||f(x) - f(y)|| \geq q||x - y||, \quad \text{für } x, y \in X.$$

$f(A)$ sei abgeschlossen. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) Es gibt ein $\xi \in A$ mit $\xi = f(\xi)$.

(ii) $\bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(A) \neq \emptyset$, wobei $f^1 := f$, $f^{n+1} := f \circ f^n$.

(iii) Es gibt $x_n \in A$ $(n = 1, 2, \ldots)$ mit $\lim_{n\to\infty} ||x_n - f(x_n)|| = 0$

(Hinweis: $f$ ist injektiv.)

**Aufgabe 4** (4 P)
Beweisen sie, daß die Funktion $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ \sin z \\ \exp(x + y + z) \end{pmatrix}$$

an der Stelle $(1, 0, 0)$ lokal invertierbar ist.

# Blatt 9

**Aufgabe 1** (4 P)
Sei $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + x^2 \sin \frac{1}{x} & , \text{ für } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ für } x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß $f$ differenzierbar ist mit $f'(0) = \frac{1}{2}$, daß aber in jeder Umgebung von 0 unendlich viele Extrema vorliegen. Folgern Sie, daß $f_{|U}$ für keine Umgebung $U$ von 0 injektiv ist. Wieso ist dies kein Widerspruch zum Umkehrsatz?

**Aufgabe 2** (4 P)
Sei $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definiert durch

$$f(x, y, z) = (e^{2y} + e^{2z}, e^{2x-2z}, x - y).$$

Beschreiben Sie das Bild $f(\mathbf{R}^3)$, und zeigen Sie, daß $f : \mathbf{R}^3 \to f(\mathbf{R}^3)$ bijektiv mit differenzierbarer Umkehrabbildung ist.

**Aufgabe 3** (4 P)
Sei $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ definiert durch

$$f(x, y) = (x^3 - 3xy^2, 3x^2y - y^3).$$

Berechnen Sie die Funktionalmatrix und, wo sie existiert, ihre Inverse. Wo ist $f$ lokal invertierbar? Zeigen Sie, daß $f$ surjektiv ist und jeder Punkt in $\mathbf{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$ genau drei Urbilder hat.
(Hinweis: $(x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3) = (x + iy)^3$)

**Aufgabe 4** (4 P)
Zeigen Sie, daß es eine offene Umgebung $V \subset \mathbf{R}^2$ von $(0, 0)$ und eine differenzierbare Funktion $f : V \to \mathbf{R}^2$, $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$ gibt, derart, daß das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} e^{x+f_1} + \sin(y + f_2) &= 1 \\ \log(f_1^3 + 1) + f_2 + x^2 &= 0 \end{aligned}$$

erfüllt ist. Bestimmen Sie die Funktionalmatrix von $f$ an der Stelle $(0, 0)$.

**Nur so:** Ein Rechteck mit den Seitenlängen $a$ und $b$ sei disjunkt in endlich viele kleinere Rechtecke mit Seitenlängen jeweils $a_i$ und $b_i$ zerlegt. Für alle $i$ gelte: Mindestens eine der beiden Seitenlängen $a_i$ und $b_i$ ist ganzzahlig. Beweisen Sie, daß dann auch mindestens eine der beiden Seitenlängen $a$ und $b$ ganzzahlig ist.
(Hinweis: Man betrachte das komplexe Integral $\int\int e^{2\pi i(x+y)} dxdy$.)

## Blatt 10

**Aufgabe 1** (4 P)
Sei

$$\mathrm{SL}_n(\mathbf{R}) := \{M \in \mathbf{R}^{n \times n} \mid \det M = 1\}$$

und gelte $A \in \mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$. Zeigen Sie, daß es offene Teilmengen $V \subset \mathbf{R}^{n\times n}$ mit $A \in V$ und $U \subset \mathbf{R}^{n^2-1}$, sowie eine glatte bijektive Abbildung

$$f : U \to V \cap \mathrm{SL}_n(\mathbf{R}).$$

gibt.

**Aufgabe 2** (4 P)
Sei $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ stetig differenzierbar und

$$N := \{x \in \mathbf{R}^n \mid f(x) = 0\}.$$

Gegeben seien weiter ein $a \in N$ und ein Vektor $x_0 \in \mathbf{R}^n$ mit $\mathrm{grad} f(a) \neq 0$ und $\langle \mathrm{grad} f(a), x_0 \rangle = 0$. Beweisen Sie, daß ein $\varepsilon > 0$ und eine stetig differenzierbare Abbildung $c : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \to N$ existieren mit $c(0) = a$ und $c'(0) = x_0$.

**Aufgabe 3** (4 P)
Welcher Quader hat bei vorgegebener Oberfläche $F > 0$ das größte Volumen?

**Aufgabe 4** (4 P)
Man bestimme den Abstand des Punktes $(1, -1, 0)$ vom Rotationshyperboloid

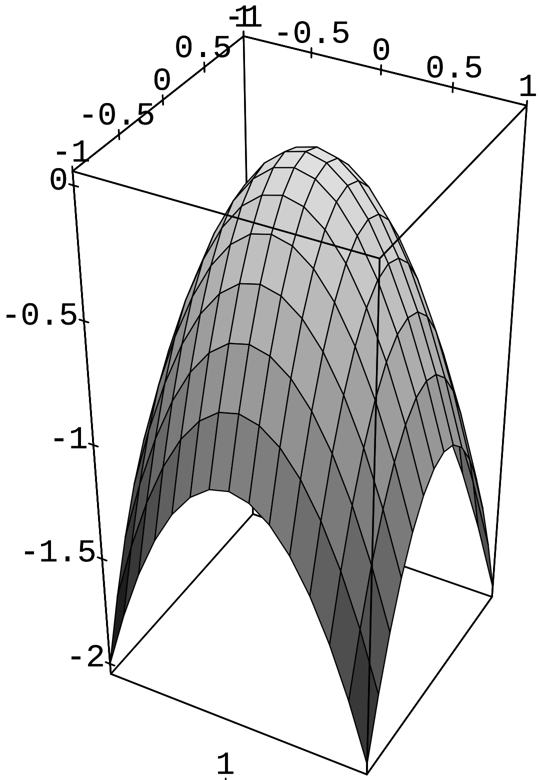
$$H := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 1\},$$

d.h. $\inf_{(x,y,z)\in H} d((x, y, z), (1, -1, 0))$.

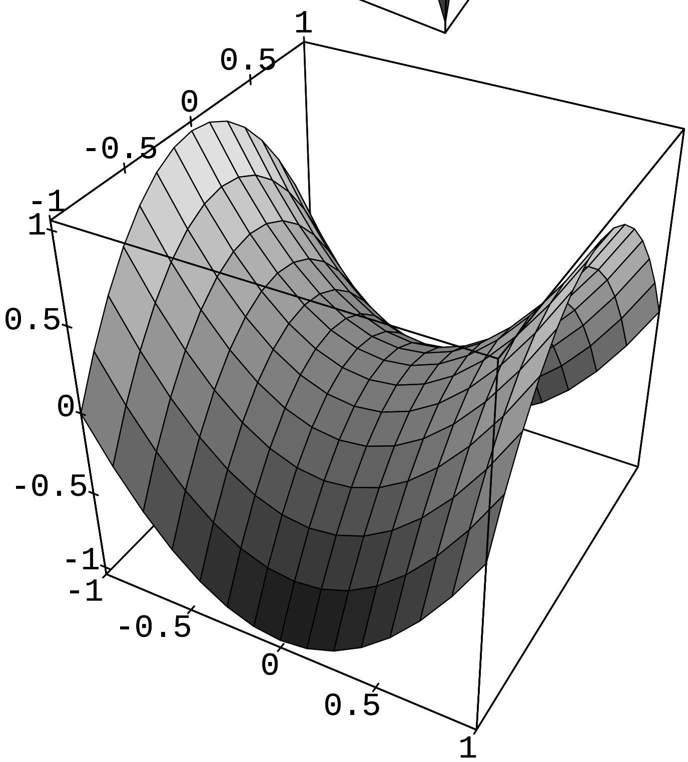
# Anhang C

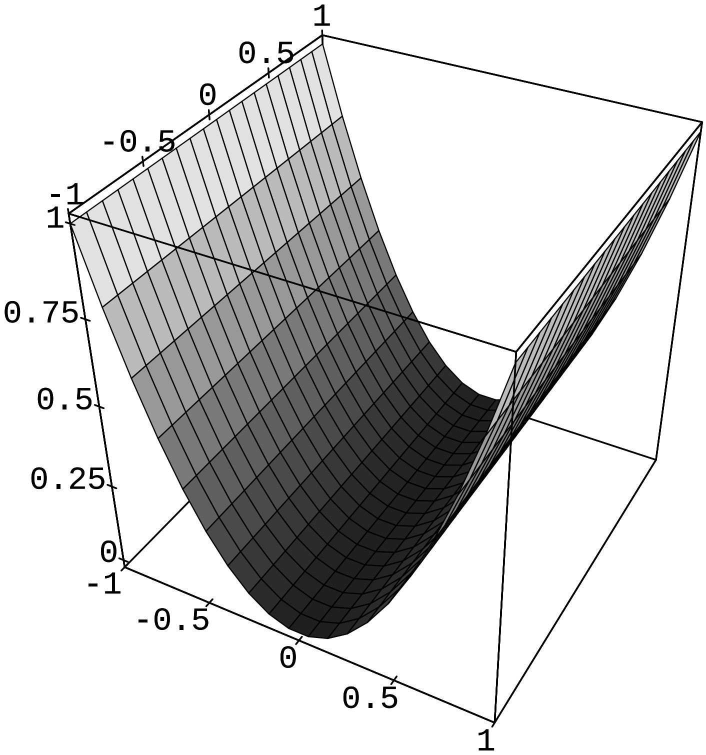
# Die Graphen einiger Funktionen bei kritischen Punkten

$f(x,y) =$
$-(x^2+y^2)$

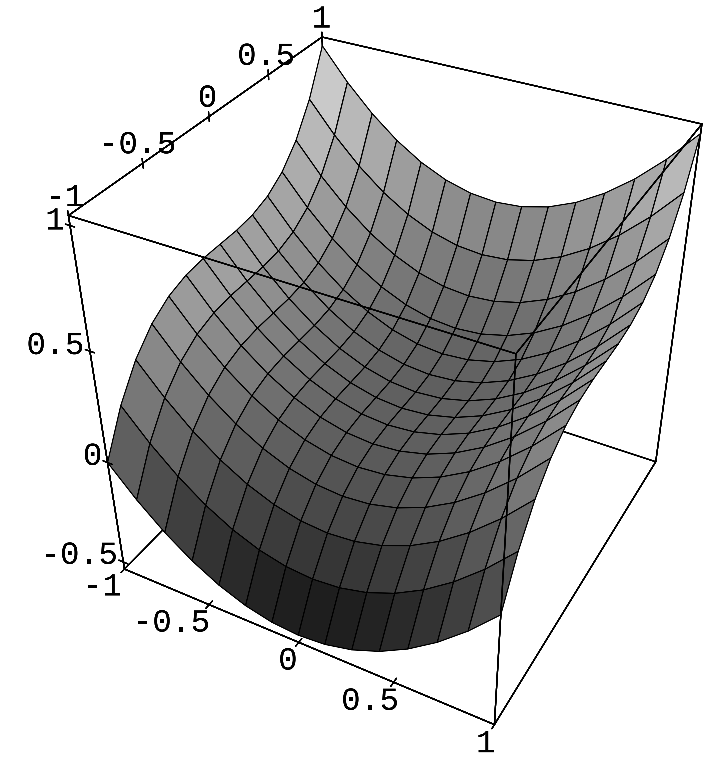



$f(x,y) =$
$x^2 - y^2$



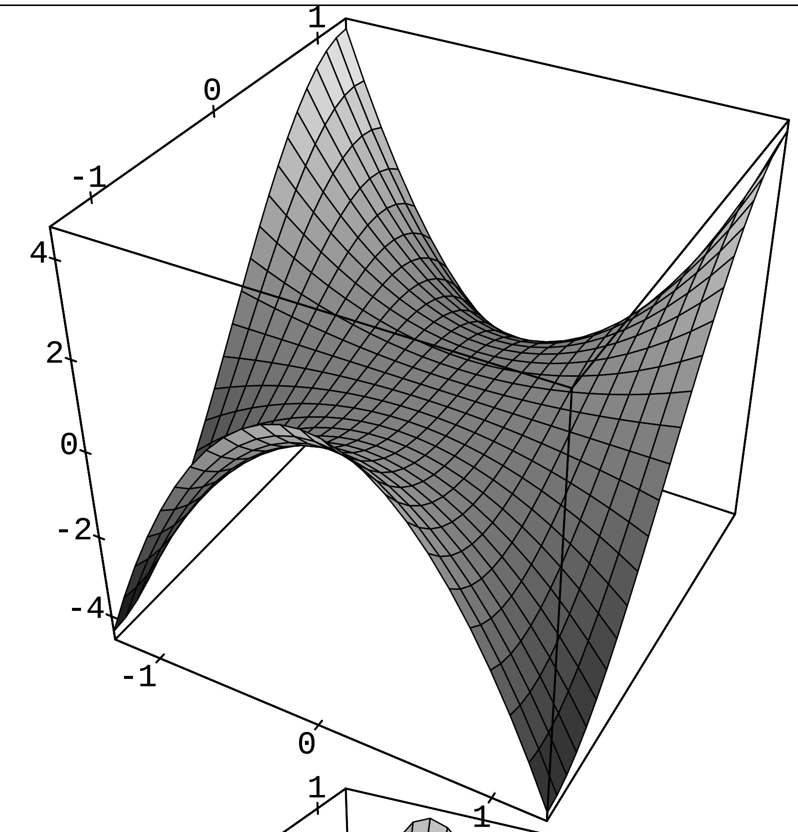



$f(x,y) = x^2$

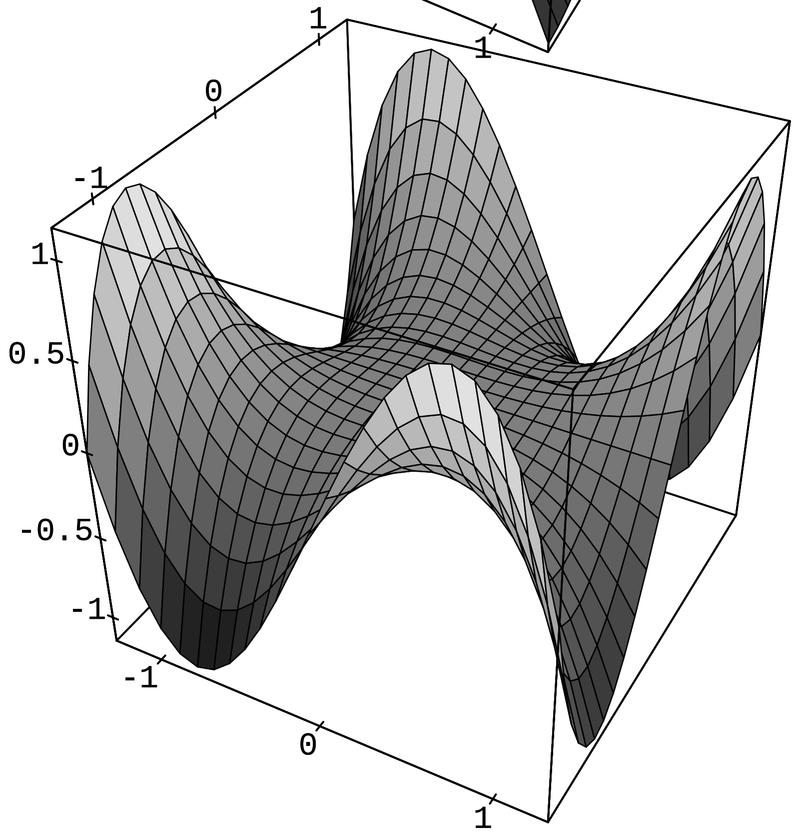


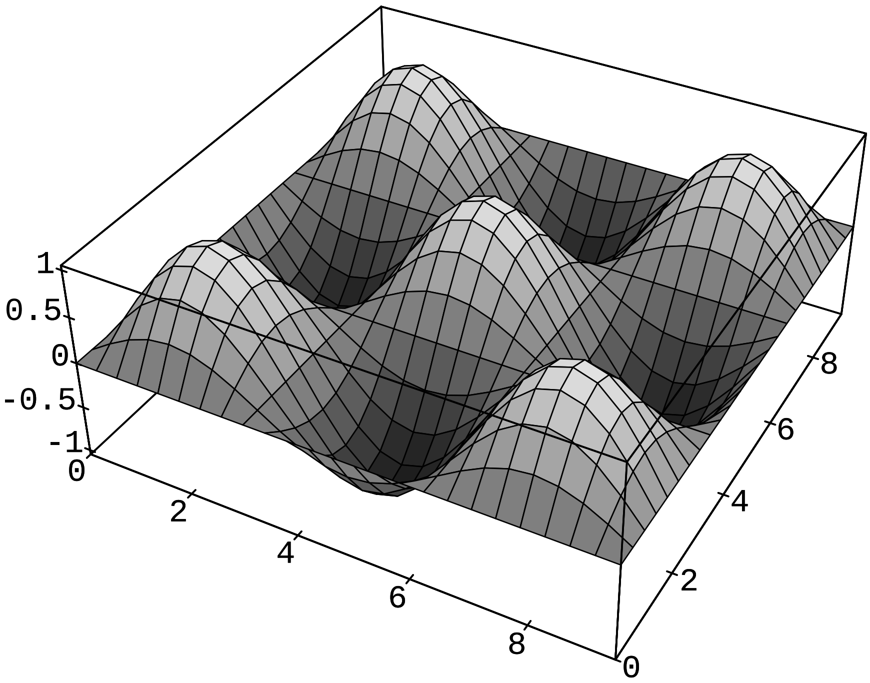

$f(x,y) =$
$(x^2 + y^3)/2$

$f(x,y) =$
$y(3x^2 - y^2)$

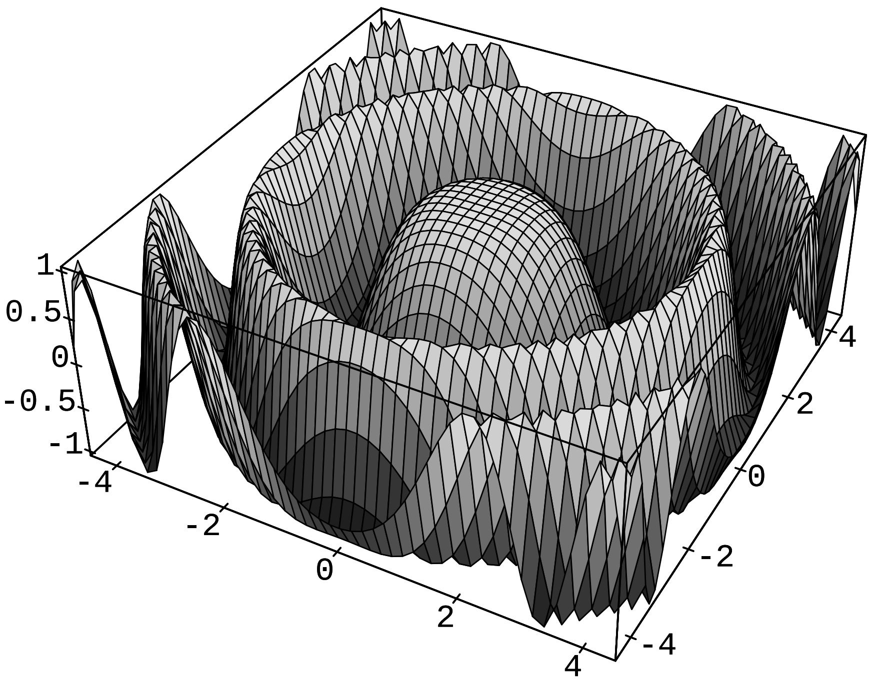



$f(x,y) =$
$xy(x^2 - y^2)$






$f(x,y) =$
$\sin x \sin y$




$f(x,y) =$
$\cos(x^2 + y^2)^{1/2}$

$f(x,y) =$
$x^7y - 7x^5y^3 +$
$7x^3y^5 - xy^7$